Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016
Harjoitus 6

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 2.3.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 1.3. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 8.3.

Jaollisuus

49. Todista lemma 6.3.

50. Tutkitaan polynomijoukkoa $A = \{p \in \mathbb{Z}_3[X] \mid \deg(p) \leq 2\}$. Piirrä joukon A jaollisuusjärjestystä kuvaava kaavio samaan tapaan kuin luentomateriaalin sivulla 53. Mieti samalla, mitkä alkiot ovat yksiköitä, mitkä jaottomia ja mitkä ovat kunkin alkion liittoalkiot.

51. Osoita, että kahden alkion kaikki suurimmat yhteiset tekijät ovat toistensa liittoalkioita.

52. Täydennä esimerkin 6.9 puuttuvat yksityiskohdat. Toisin sanoen osoita, että renkaan $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ alkio 2 ei jaa kumpaakaan luvuista $1 + i\sqrt{5}$ ja $1 - \sqrt{5}$.

53. Todista lause 6.11.

Renkaat

54. (a) Osoita, että kokonaislukukertoimisten polynomien renkaassa $\mathbb{Z}[X]$ ideaali $\langle X \rangle$ on alkuideaali, mutta ei maksimaalinen ideaali. (Tätä tehtävää ei ole tarkoitus tehdä määritelmän perusteella, vaan käyttää sen sijaan valmiita tuloksia. Jos tehtävän tekeminen ei suju, voit katsoa vinkin tehtäväpaperin lopusta.)
    (b) Onko renkaan $\mathbb{Q}[X]$ ideaali $\langle X \rangle$ on maksimaalinen?

Lisää tehtäviä renkaista ja jaollisuudesta

55. Osoita, että jos I ja J ovat renkaan R ideaaleja ja J sisältää I:n, niin J on yhdiste eräistä I:n sivuluokista.

56. Olkoon R kaikkien jatkuvien funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama rengas. Osoita, että $\{f \in R \mid f(0) = 0\}$ on R:n maksimaalinen ideaali.

57. Selvitä, mitä ovat Artinin renkaat. (Tätä ei kerrota luentomateriaalissa.) Osoita, että jos Artinin rengas on kokonaisalue, se on myös kunta.

Ylimääräinen tehtävä

58. Selvitä, mitä ovat Noetherin renkaat. (Tätä ei kerrota luentomateriaalissa.) Osoita, että jokainen pääideaalirengas on Noetherin rengas.

Vihje tehtävään 54 Mieti, minkä tutun $\mathbb{Z}$-algebran kanssa $\mathbb{Z}[X]/\langle X\rangle$ on isomorfinen. Osoita sitten isomorfisuus polynomien universaalisuusominaisuuden avulla. (Sitä käsitellään lausessa 4.13. Sinun ei tarvitse lukea lausetta edeltävää polynomialgebroiden konstruktiota tässä vaiheessa, jos et halua.)