Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016
Harjoitus 4

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 24.2.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 23.2. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 2.3.

Renkaat

39. Oletetaan, että I on renkaan R ideaali ja $1 \in I$. Miltä I näyttää?

40. Osoita lemma 5.1. (Vinkki: Älä tee kaikkea käsin, vaan yritä käyttää hyväksesi valmiita tuloksia niin paljon kuin pystyt.)

41. (a) Osoita määritelmän nojalla, että $3\mathbb{Z}$ on renkaan $\mathbb{Z}$ maksimaalinen ideaali.
    (b) Miten muuten kuin määritelmään nojautuen voit osoittaa a)-kohdan tuloksen?
    (c) Mitä muita renkaan $\mathbb{Z}$ maksimaalisia ideaaleja keksit?

42. Osoita, että vaihdannaisen renkaan R tekijärengas R/I on kokonaisalue, jos ja vain jos I on renkaan R alkuideaali.

Algebrat ja modulit

43. Määritellään $\mathbb{R}$-modulissa $\mathbb{R}^2$ kertolasku kaavalla

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2).$$

    (a) Onko näin saatava rakenne $\mathbb{R}$-algebra?
    (b) Onko kyseessä kunta?
    (c) Millaisella kertolaskulla modulista $\mathbb{R}^2$ saa kunnan?

44. (a) Osoita, että $\mathbb{Z}$-moduli $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ on isomorfinen matriisimodulin $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ kanssa.
    (b) Etsi kanta modulille $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$.
    (c) Osoita, että kaikkia modulin $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ alkioita ei voi kirjoittaa muodossa $x \otimes y$, missä $x, y \in \mathbb{Z}^2$.

45. Olkoon A liitännäinen ja ykkösellinen R-algebra. Osoita, että on olemassa R-algebrojen homomorfismi $\varphi\colon R \to A$, jolle $\varphi(1_R) = 1_A$. Jos R on kunta ja A on epätriviaali (eli $A \neq \{0\}$), osoita, että R voidaan upottaa A:n alialgebraksi.

Osaamistesti

46. Tee Moodlesta löytyvä osaamistesti 2, joka käsittelee moduleita ja algebroita.

Lisää tehtäviä moduleista ja algebroista

47. Osoita, että jos moduleilla on yhtä mahtavat kannat, modulit ovat isomorfiset. Tee tämä käyttäen pelkästään universaalisuusominaisuutta.

48. Osoita, että on olemassa vain kolme keskenään epäisomorfista 2-ulotteista ykkösellistä $\mathbb{R}$-algebraa.

    Vihje: Tarkastele kantavektorien kertotaulua.