Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016
Harjoitus 4

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 17.2.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 16.2. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 24.2.

Tensoritulo

30. (a) Tutkitaan modulin $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{3\times 2}$ alkioita

$$a = (-1,2) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = (0,1) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad c = (-1,2) \otimes \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Laske $a + b$, $3a$ ja $a - 2c$.

(b) Millaiset alkiot virittävät modulin $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{3\times 2}$?

(c) Oletetaan, että M ja N ovat R-moduleita. Lemman 3.12 nojalla jokaisen tensoritulon $M \otimes_R N$ alkion voi kirjoittaa äärellisenä summana $\sum_i x_i \otimes y_i$, missä $x_i \in M$ ja $y_i \in N$ kaikilla i. Onko tämä esitystapa yksikäsitteinen?

31. Tässä esimerkissä tutustutaan skalaarien laajennukseen, joka on yksi tensoritulon sovelluksista. Tutustu tehtävää tehdessäsi esimerkkiin 3.15.

Olkoon R renkaan S alirengas. Oletetaan, että M on R-moduli. Kuten esimerkissä mainitaan, modulissa $M_S = S \otimes_R M$ on mahdollista määritellä renkaan S skalaarikertolasku kaavalla

$$a.\left(\sum_i s_i \otimes m_i\right) = \sum_i (as_i) \otimes m_i,$$

missä $a \in S$ ja $\sum_i s_i \otimes m_i$ on modulin M_S mielivaltainen alkio.

(a) Ryhmä $\mathbb{Z}^4$ ei ole $\mathbb{Q}$-moduli millään luonnollisella tavalla. Siitä voidaan kuitenkin muodostaa tensoritulon avulla $\mathbb{Q}$-moduli $\mathbb{Z}^4_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^4$. Määritä seuraavat modulin $\mathbb{Z}^4_{\mathbb{Q}}$ alkiot:

$$\text{i)}\ \frac{1}{2}.\big(3 \otimes (-5,9,0,1)\big) \quad \text{ii)}\ -\frac{5}{2}.\big(3 \otimes (-5,9,0,1) + (-4) \otimes (-1,-1,2,2)\big)$$

(b) Osoita, että $M_S = S \otimes_R M$ on S-moduli

(c) Osoita tensoritulon universaalisuusominaisuuden nojalla, että $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Q}^m$. Voit tarvittaessa katsoa tähän tehtävään apua tehtäväpaperin lopusta.

32. Tee seuraavista kohdista vähintään toinen. Voit valita itsellesi sopivan vaikeustason. Ensimmäinen kohta on helpompi kuin toinen.

(a) Todista lauseen 3.14 kohta iv).

(b) Todista lauseen 3.14 kohta iii). (Vihje: Tässä tarvitaan myös suoran summan universaalisuusominaisuutta.)

Algebrat

33. Harjoituksessa 3 tutustuttiin vapaaseen moduliin $\mathbb{C}^{(S_3)}$. Jatketaan sen tutkimista. Kyseisessä modulissa voidaan määritellä bilineaarinen kertolasku, joka on kannan vektoreilla täsmälleen sama kuin permutaatioryhmän S_3 kertolasku. Tämä kertolasku tekee modulista $\mathbb{C}^{(S_3)}$ algebran.

    Merkitään $\sigma = (132)$, $\tau = (12)$ ja $\rho = (123)$. Määritä bilineaarisuuteen nojautuen seuraavat tulot:

    (a) $\sigma(\tau + \rho)$ (b) $(4\sigma)(-5\rho)$ (c) $(3\sigma + i\tau)(i\sigma - 2\tau)$

34. (a) Merkitään
    $$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$
    Osoita, että joukko
    $$K = \{a_0 I + a_1 A + a_2 B + a_3 C \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\}$$
    on $\mathbb{R}$-algebran $\mathbb{C}^{2\times 2}$ alialgebra.

    (b) Tutustu esimerkissä 4.9 esiteltyyn kvaternioalgebraan
    $$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$
    Voit hypätä kyseiseen esimerkkiin ilman, että luet kaikkea sitä edeltävää teoriaa. Halutaan määritellä modulihomomorfismi $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, jolle pätee
    $$f(1) = I, \quad f(i) = A, \quad f(j) = B, \quad f(k) = C.$$
    Mistä tiedetään, että tällainen modulihomomorfismi on olemassa? (Vinkki: Tätä ei ole tarkoitus osoittaa modulihomorfismin määritelmään nojautuen.)

    (c) Osoita, että f on algebrahomomorfismi.

    (d) Osoita, että algebrat K ja $\mathbb{H}$ ovat isomorfisia. Millä muulla tavalla voit todistaa väitteen kuin etsimällä isomorfismin näiden kahden algebran välille?

35. Todista lauseen 4.5 kohta ii).

Lisää tehtäviä moduleista

36. Muotoile ja todista ryhmien homomorfialausetta vastaava tulos moduleille.

37. Osoita, että $\mathbb{Z}$-moduli $\mathbb{Q}$ ei ole äärellisesti viritetty, t.s. ei löydy äärellistä osajoukkoa $A \subset \mathbb{Q}$, jolle $\langle A \rangle = \mathbb{Q}$.

38. Oletetaan, että A on R-moduli, ja $f\colon A \to A$ R-modulihomomorfismi, jolle pätee $f \circ f = f$. Osoita, että tällöin
    $$A \cong \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

Apu tehtävään 31 Aloita osoittamalla, että kuvaus
$$f\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Q}^m, \quad (q, (a_1, \ldots, a_m)) \to (qa_1, \ldots, qa_m)$$
on bilineaarinen. Käytä sen jälkeen tensoritulon universaalisuusominaisuutta.