Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016
Harjoitus 3

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 10.2.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 9.2. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 17.2.

Osaamistesti

Tee Moodlesta löytyvä tekijästruktuureita ja homomorfismeja koskeva osaamistesti. (Osaamistesti valmistuu keskiviikon 3.2. aikana.)

Modulit

21. Osoita, että jos $f\colon M \to N$ on modulihomomorfismi, niin $\operatorname{Im} f$ on modulin N alimoduli ja $\operatorname{Ker} f$ on modulin M alimoduli.

22. Osoita, että jokainen $\mathbb{Z}$-modulin $\mathbb{Q}$ vapaa osajoukko sisältää korkeintaan yhden alkion, ja päättele tästä, että $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa moduli.

23. Tutustu lauseeseen 2.7 ja sen todistukseen.

    (a) Osoita, että φ on injektio, jos ja vain jos f on injektio ja $f(B)$ on vapaa.

    (b) Osoita, että φ on surjektio, jos ja vain jos $f(B)$ virittää modulin N.

Modulikonstruktioita

24. Tutustu modulien suoriin tuloihin ja summiin.

    (a) Miltä näyttävät suoran tulon $\Pi_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}^{2\times 2}$ alkiot? Anna esimerkkejä alkioista.

    (b) Miltä näyttävät suoran summan $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}^{2\times 2}$ alkiot? Anna esimerkkejä alkioista.

    (c) Miten suoran tulon alkiot eroavat suoran summan alkioista?

    (d) Millainen kuvauksia ovat kanoniset projektiot a-kohdan modulin tapauksessa? Anna esimerkki jonkin alkion kuvasta kanonisessa projektiossa.

    (e) Millaisia kuvauksia ovat kanoniset injektiot b-kohdan modulin tapauksessa? Anna esimerkit jonkin alkion kuvasta kanonisessa injektiossa.

    (f) Valitse suorasta summasta $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}^{2\times 2}$ jonkin alkio x ja kirjoita se summana alkioista $\iota_i(x)$.

25. Tutkitaan modulia $\mathbb{C}^{(S_3)}$. Tämän merkinnän määritelmä löytyy luvusta 3.1.

    (a) Anna esimerkki modulin $\mathbb{C}^{(S_3)}$ alkiosta. Miltä näyttää modulin $\mathbb{C}^{(S_3)}$ kanta?

    (b) Luentomateriaalissa on kerrottu, kuinka modulin $\mathbb{C}^{(S_3)}$ kanta-alkiot voidaan samastaa joukon S_3 alkioiden kanssa. Mitä joukon S_3 alkiota kukin kanta-alkio vastaa?

(c) Tutkitaan modulin $\mathbb{C}^{(S_3)}$ alkioita $x = 4(132) - i(12)$, $y = -\sqrt{8}(12)$ sekä $z = 14(132) + (123) + 2i(13)$. Määritä alkiot $5ix$, $x + y$ sekä $5x + 3y - z$.

(d) Minkä tutun modulin kanssa $\mathbb{C}^{(S_3)}$ on isomorfinen?

26. Tässä tehtävässä tutkitaan, kuinka ristitulo voidaan kirjoittaa tensoritulon avulla. Lue tehtävää tekiessäsi esimerkkiä 3.10.

    (a) Jos vektorien ristitulo ei ole sinulle entuudestaan tuttu käsite, tutustu siihen esimerkiksi kurssin Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I materiaalin avulla.

    (b) Esimerkin 3.10 merkintöjä käyttäen, mitä ovat ristitulon tapauksessa R, m, n, P ja L? Jos tehtävä tuntuu kovin vaikealta, voit katsoa vastauksen tehtäväpaperin lopusta ja jatkaa eteenpäin.

    (c) Laske $f((0, 5, -2), (-1, 3, 2))$.

    (d) Oletetaan, että $x, y \in \mathbb{R}^3$. Laske $f(x, y)$. Vertaa saamaasi tulosta ristituloon $x \times y$.

Lisää tehtäviä moduleista

27. Oletetaan, että M on vaihdannainen ryhmä, jonka kertaluku on n. Osoita, että M on $\mathbb{Z}_n$ moduli, kun skalaarikertolasku määritellään kaavalla $[k]_n.m = km$ kaikilla $[k]_n \in \mathbb{Z}_n$ ja $m \in M$. (Muista osoittaa, että skalaarikertolaskun voi ylipäätään määritellä edellä mainitulla tavalla eli että se on kuvaus $\mathbb{Z}_n \times M \to M$.)

28. Olkoon R vaihdannainen rengas, I ja J renkaan R ideaaleja. Tekijäryhmälle R/I voidaan antaa R-modulin struktuuri määrittelemällä $r.(x + I) = rx + I$. Osoita:

    (a) Jos R-modulit R/I ja R/J ovat isomorfisia, niin $I = J$.

    (b) Jos renkaat R/I ja R/J ovat isomorfisia, voi kuitenkin olla $I \neq J$.

29. Osoita, että jokainen rationaaliluku voidaan ilmaista summana

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{m_i}{p_i^{k_i}},$$

jossa osoittajat ovat kokonaislukuja ja nimittäjät alkulukujen potensseja.

Tämä tehtävä on osa luentomateriaalin esimerkkiä 2.4. Jos et pääse tehtävässä eteenpäin, voit katsoa apua tehtäväpaperin lopusta.

Apu tehtävään 26 Valitse $R = \mathbb{R}$, $m = n = 3$, $P = \mathbb{R}^3$ ja

$$L\colon \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^3, \quad L(A) = (A_{23} - A_{32},\ A_{31} - A_{13},\ A_{12} - A_{21}).$$

Apu tehtävään 29 Aloita osoittamalla seuraava aputulos: Oletetaan, että m ja n ovat kokonaislukuja, joille pätee $\operatorname{syt}(m, n) = 1$. Osoita, että rationaaliluku $\frac{1}{mn}$ voidaan esittää muodossa $\frac{b}{m} + \frac{c}{n}$, missä $b, c \in \mathbb{Z}$.