Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016
Harjoitus 2

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 3.2.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 2.2.

Homomorfismit

11. Tutkitaan ryhmähomomorfismia $f\colon \mathbb{Z} \to S_4$, $f(k) = (1423)^k$.
    (a) Ryhmällä $\mathbb{Z}$ on normaali aliryhmä $3\mathbb{Z}$. Onko mahdollista määritellä kuvaus
    $$\bar{f}\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to S_4$$
    ehdolla $\bar{f}(k + 3\mathbb{Z}) = f(k)$? (Tässä ei ole tarkoitus käyttää mitään kurssimateriaalin tulosta, vaan miettiä kuvauksen määritelmää.)
    (b) Ryhmällä $\mathbb{Z}$ on normaali aliryhmä $8\mathbb{Z}$. Onko mahdollista määritellä kuvaus
    $$\bar{f}\colon \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to S_4$$
    ehdolla $\bar{f}(k + 8\mathbb{Z}) = f(k)$? (Tässä ei ole tarkoitus käyttää mitään kurssimateriaalin tulosta, vaan miettiä kuvauksen määritelmää.)
    (c) Miten a- ja b-kohta liittyvät ekvivalenssirelaatioihin sekä ekvivalenssirelaatioiden kanssa yhteensopiviin kuvauksiin?
    (d) Millainen normaalin aliryhmän N on oltava, jotta olisi mahdollista määritellä homomorfismi
    $$\bar{f}\colon \mathbb{Z}/N \to S_4$$
    ehdolla $\bar{f}(k + N) = f(k)$?

12. Tutustu Moodlesta löytyvään itseselittämisen strategiaan. Lue sen jälkeen homomorfismien hajottamista käsittelevä lause 1.13 sekä lauseen todistus käyttäen itseselittämisen strategiaa.

13. (a) Osoita, että jokaisella $n \in \{2, 3, ...\}$ on olemassa ryhmän $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä H siten, että $H \cong \mathbb{Z}_n$. Tee tämä käyttäen ryhmien homomorfialausetta.
    (b) Osoita, että ryhmällä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ei ole ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ kanssa isomorfista aliryhmää.
    (c) Osoita, että ryhmällä $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ kanssa isomorfinen aliryhmä.

14. Osoita, että on olemassa ryhmähomomorfismi $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$, $f([x]_n) = [x]_m$, jos ja vain jos $m \mid n$. Tee tämä käyttämällä lausetta 1.15. (Tämä tehtävä tehtiin jo Harjoituksessa 1. Jos käytit silloin homomorfismien hajotuslausetta, voit hypätä tämän tehtävän yli.)

15. Tämä on Harjoituksen 1 tehtävä 9. Jos olet jo tehnyt sen, voit hypätä tämän tehtävän yli.

    Olkoot M, G ja η kuten alaluvussa 1.3. Oletetaan lisäksi, että H on vaihdannainen ryhmä ja $f\colon M \to H$ monoidihomomorfismi.

    Osoita, että on olemassa ryhmähomomorfismi $g\colon G \to H$, jolle pätee $f = g \circ \eta$.

Modulit

16. Tutkitaan ryhmän S_6 alkiota $\sigma = (15463)$ ja sen virittämää aliryhmää $H = \langle \sigma \rangle$. Oletetaan, että ryhmässä H on määritelty renkaan $\mathbb{Z}$ skalaarikertolasku, joka tekee H:sta $\mathbb{Z}$-modulin. Määritä seuraavat ryhmän H alkiot. Käytä perusteluissasi modulin määritelmää 2.1.

    (a) $1.\sigma$ (b) $2.\sigma$ (c) $3.\sigma$ (d) $0.\sigma$ (e) $(-1).\sigma$

17. Oletetaan, että M on $\mathbb{Z}$-moduli. Osoita, että tällöin skalaarikertolasku määritellään kaavalla $k.x = kx$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ ja $x \in M$. (Tässä kx on monikerta.)

18. (a) Tutkitaan ryhmän $\mathbb{Z}$ osajoukkoa $S = \{4, 8, -6\}$. Määritä osajoukon S virittämä aliryhmä $\langle S \rangle$. (Lisätehtävä: Oletetaan, että $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{Z}$. Määritä $\langle S \rangle$.)
    (b) Olkoon M moduli, jolla on alimodulit A ja B. Osoita, että $A + B = \langle A \cup B \rangle$. (Tässä $\langle A \cup B \rangle$ on joukon $A \cup B$ virittämä aliryhmä.)

19. (a) Onko $\mathbb{Z}_4^{2\times 3}$ vapaa $\mathbb{Z}_4$-moduli?
    (b) Onko edellisen tehtävän moduli vektoriavaruus?

Monoidit

20. Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \geq 1$. Olkoon $R_{m,n}$ joukon $\mathbb{N}$ ekvivalenssirelaatio

$$xR_{m,n}y \Leftrightarrow x = y \quad \text{tai} \quad (x \geq n \text{ ja } y \geq n \text{ ja } m|x-y).$$

Osoita, että monoidin $(\mathbb{N}, +)$ yhteenlasku ja relaatio $R_{m,n}$ ovat yhteensopivat ja kuvaile tekijämonoidia $\mathbb{N}/R_{m,n}$.