Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016
Harjoitus 12

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 4.5.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 3.5. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 10.5.

Vapaat ryhmät

109. Tutkitaan ryhmää $G = \langle a, b \mid a^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ ba = a^3 b \rangle$.

   (a) Kirjota alkiot $abab$ ja $b^4 a^{-3} b$ muodossa $a^n b^m$, missä $n, m \in \mathbb{N}$.

   (b) Montako alkiota ryhmässä G on korkeintaan?

   (c) Kirjoita ryhmän G kertotaulu.

   (d) Kuinka monta alkiota ryhmässä G on?

   Lisätehtävä: Minkä tutun ryhmän kertotaulu on kyseessä?

110. Osoita, että
$$D_n = \left\langle s_1, s_2 \mid s_1^2,\ s_2^2,\ (s_1 s_2)^n \right\rangle .$$

111. (a) Miltä näyttävät ryhmän $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ alkiot? Mikä on ryhmän laskutoimitus?

   (b) Ovatko ryhmät $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$ ja $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ isomorfiset?

112. Kuinka monta 20 alkion vaihdannaista ryhmää on olemassa?

Ratkeavat ryhmät

113. Osoita, että seuraavat ryhmät ovat ratkeavia:

   (a) Ryhmä, jonka kertaluku on 1.

   (b) Ryhmät, joiden kertaluku on 2, 3, 5, tai 7.

   (c) Ryhmät, joiden kertaluku on 4.

   (d) Ryhmät, joiden kertaluku on 6 tai 10.

   (e) Ryhmät, joiden kertaluku on 8 tai 9.

   Olet nyt osoittanut, että kaikki ryhmät, joiden kertaluku on korkeintaan 10, ovat ratkeavia.

Lisää tehtäviä ryhmistä

Valitse seuraavista tehtävistä kolme. Jäljelle jäävä tehtävä on ylimääräinen tehtävä.

114. Tarkastellaan niin kutsuttua viidentoista peliä. Siinä 4×4-kehikkoon on asetettu viisitoista numeroitua neliötä. Neliöt voivat liikkua toistensa suhteen niin, että tyhjän paikan vierellä oleva neliö siirretään tyhjään paikkaan. Peli ratkaistaan järjestämällä neliöt numerojärjestykseen vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas niin, että tyhjä neliö on oikeassa alalaidassa.

   Osoita, että oheisessa kuvassa esitetty asema on mahdoton ratkaista. (Käytä tarvittaessa tehtäväpaperin lopussa olevaa vihjettä.)

1	2	3	14
10	6	7	8
9	4	11	12
13	5	15	

115. Keksi ryhmän S_4 esitys, jossa käytät kolmea virittäjää, joiden kaikkien kertaluku on kaksi. (Käytä tarvittaessa tehtäväpaperin lopussa olevaa vihjettä.)

116. Kirjoita ryhmä $\mathbb{Z}_{63}$ äärelisviritteisten vaihdannaisten ryhmien peruslauseen antamassa muodossa.

117. Tee ainakin toinen seuraavista:

    (a) Osoita, että ratkeavan ryhmän aliryhmät ovat ratkeavia.

    (b) Osoita, että ratkeavien ryhmien äärellinen suora summa on ratkeava.

Vihje tehtävään 114: Käsittele vain sellaisia asemia, joissa tyhjä ruutu on oieassa alakulmassa. Jokainen siirto, joka johtaa yhdestä tällaisesta asemasta toiseen, voidaan kirjoittaa permutaationa. Määritä tällaisen permutaation etumerkki.

Vihje tehtävään 115: Valitse virittäjät $s_1 = (12)$, $s_2 = (23)$ ja $s_3 = (34)$.