Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016
Harjoitus 11

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 27.4.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 26.4. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 4.5.

Isomorfialauseet

99. (a) Minkä tutun ryhmän kanssa tekijäryhmä

$$(\mathbb{Z}/50\mathbb{Z})/(25\mathbb{Z}/50\mathbb{Z})$$

on isomorfinen? Millainen kuvaus toimii isomorfismina ryhmien välillä?

100. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{Z}$. Osoita 1. isomorfialauseen avulla, että

$$\operatorname{syt}(a,b)\mathbb{Z}/(b\mathbb{Z}) \cong a\mathbb{Z}/\operatorname{pyj}(a,b)\mathbb{Z}.$$

Kompositiojonot

101. Määritä seuraavien ryhmien kompositiojonot. Minkä ryhmien kanssa kompositiojonojen tekijät ovat isomorfisia?

(a) D_5

(b) S_4

Cauchyn lause

102. Osoita, että Lagrangen lause ei päde toiseen suuntaan. Toisin sanoen osoita, että seuraava väite **ei ole tosi**:

> Oletetaan, että G on ryhmä, jonka kertaluku on n. Oletetaan lisäksi, että $m|n$. Tällöin on olemassa aliryhmä $H \leq G$, jonka kertaluku on m.

Voit tarvittaessa katsoa vihjeen tähän tehtävään tehtäväpaperin lopusta.

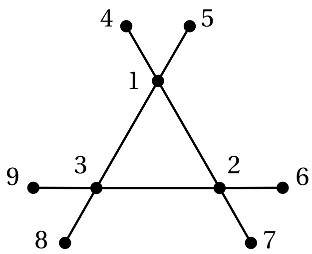
103. Lue Cauchyn lauseen todistus. Mihin tarvitaan oletusta siitä, että p on alkuluku? Todistuksessa otetaan käyttöön luku a. Mikä luvun a arvo on, jos $G = S_4$ ja $p = 3$?

Ryhmän keskus

104. Olkoon G ryhmä, $Z(G)$ sen keskus. Osoita, että jos tekijäryhmä $G/Z(G)$ on syklinen, niin G on vaihdannainen.

Lisää tehtäviä ryhmistä

105. Määritä oheisen verkon symmetriaryhmän kertaluku ratavakauttajalauseen avulla.



106. (a) Oletetaan, että G on ryhmän S_n aliryhmä ja $G \neq \{(1)\}$. Osoita, että G:llä on aliryhmä, jonka indeksi on 2.

     (b) Mikä on (a)-kohdassa mainittu aliryhmä, jos $G = D_4$?

107. Olkoon p alkuluku. Äärellistä ryhmää kutsutaan p-ryhmäksi, jos sen kertaluku on jokin luvun p potenssi.

     Osoita, että äärellisellä p-ryhmällä on aina epätriviaali keskus.

Ylimääräinen tehtävä

108. Olkoon p alkuluku. Osoita, että jokainen kertalukua p^2 oleva ryhmä G on isomorfinen joko ryhmän $\mathbb{Z}_{p^2}$ tai ryhmän $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ kanssa.

Vihje tehtävään 102: Valitse $G = A_4$.