

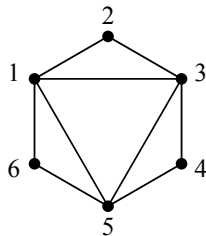
**Algebra II**  
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Kevät 2016**  
**Harjoitus 10**

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 20.4.

Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 19.4. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 26.4.

**Ryhmän toiminta ja ratavakauttajalause**

89. Tutkitaan viime harjoituksesta tuttua ryhmän  $\mathbb{Z}_9^*$ , toimintaa joukossa  $\mathbb{Z}_9$ . (Toiminta määriteltiin kaavalla  $g.x = gx$ .) Merkitään  $G = \mathbb{Z}_9^*$ .
- (a) Määritä alkion 3 kiinnittäjän  $G_3$  kaikki sivuluokat.
  - (b) Mitä sivuluokan  $4G_3$  alkioit tekevät alkion 3? Entä sivuluokan  $5G_3$ ? Miten selität havaintosi?
  - (c) Lue ratavakauttajalauseen todistus selittävän lukutavan avulla. (Tietoa selittävästä lukutavasta löytyy Moodlesta.)
90. Määritä viisikulmion symmetriaryhmän  $D_5$  kertaluku ratavakauttajalauseen avulla. Määritä sen jälkeen ryhmän alkioit.
91. Ryhmä  $S_6$  toimii oheisen verkon solmujen joukossa luonnollisella tavalla. Olkoon  $G$  ryhmän  $S_6$  aliryhmä, joka säilyttää verkon rakenteen. (Toisin sanoen,  $G$  koostuu niistä permutaatioista  $\sigma \in S_6$  joilla solmujen  $\sigma(a)$  ja  $\sigma(b)$  välillä on kaari, jos ja vain jos solmujen  $a$  ja  $b$  välillä on kaari.) Määritä ryhmän  $G$  kertaluku.



**Konjugointi**

92. (a) Määritä viisikulmion symmetriaryhmän  $D_5$  kaikki konjugaattiluokat.  
(b) Etsi jokaisen alkion  $x \in D_5$  keskittäjä ja laske indeksi  $[D_5 : C_G(x)]$ . Vertaa kutakin indeksiä alkion  $x$  konjugaattiluokan kokoon. Mitä huomaat? Mistä tämä johtuu?
93. (a) Etsi neliön symmetriaryhmän  $D_4$  kaikki aliryhmät. Mitkä niistä ovat normaaleja? (Vinkki: Tässä on tarkoitus käyttää apuna konjugaattiluokkia.)  
(b) Määritä ryhmän  $D_4$  keskus.

**Permutaation etumerkki**

94. Määritä seuraavien ryhmän  $S_9$  alkioiden etumerkki:

$$(1234), \quad (12)(34), \quad (123)(45)(6789), \quad (123)(234).$$

95. Kuinka monta aliryhmää, jonka kertaluku on 4, on ryhmällä  $A_4$ ?

## Lisää tehtäviä ryhmistä

96. Keksi graafi, kuvio, polynomi tai ryhmä, jonka symmetriaryhmä on

- (a)  $\mathbb{Z}_4$
- (b) Kleinin neliryhmä

Keksi kummankin ryhmän kohdalla kaksi erityyppistä esimerkkiä.

97. Todista seuraavat väitteet tai osoita ne vääriksi. Jos väite ei ole totta, muokkaa sitä niin, että väitteestä tulee tosi. (Yritä pitäytyä mahdollisimman pienissä muutoksissa).

- (a) Radat muodostavat osituksen.
- (b) Jos alkio kuuluu toisen alkion rataa, näillä kahdella alkiolla on itse asiassa sama rata.
- (c) Jos alkiolla on samat radat, niillä on myös samat keskittäjät.

98. (a) Määritä ryhmän  $A_4$  konjugaattiluokat ja vertaa niitä ryhmän  $S_4$  konjugaattiluokkiin.  
(b) Toisinaan ryhmän  $S_n$  konjugaattiluokka jakaantuu aliryhmässä  $A_n$  kahdeksi konjugaattiluokaksi. Keksi syklityyppiin liittyvä ehto, joka kertoo tapahtuuko jakaantuminen. Todista väitteesi.