Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016
Harjoitus 1

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 26.1.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 25.1.

Voit tarpeen vaatiessa kerrata aiemmin opittuja algebran asioita luentomateriaalin luvusta ”Kertausta”, kirjasta Johdatus abstraktiin algebraan (Häsä & Rämö) tai kirjasta Algebra I (Metsänkylä & Näätänen).

Tehtäväsarja I

1. Tutustu luentomateriaalin sivulla 12 olevaan esimerkkiin, jossa käsitellään neliön symmetriaryhmää sekä sen aliryhmää N, joka koostuu kaikista neliön kierroista.
   (a) Määritä tekijäryhmän D_4/N alkiot ja kertotaulu.
   (b) Selitä omin sanoin, miten tekijäryhmän kertotaulusta näkee, että kahden peilauksen tulo on aina kierto.
   (c) Mitä on kahden kierron tulo? Miten se näkyy tekijäryhmässä?

2. (a) Kompleksilukujen osajoukkoa $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ kutsutan Gaussin kokonaisluvuiksi. Se on renkaan $\mathbb{C}$ alirengas. Osoita, että joukko
   $$I = \{2a + 2bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
   on renkaan $\mathbb{Z}[i]$ ideaali. (Käytä apuna edeltävien algebran kurssien materiaaleja. Ideaalin käsite on määritelty niissä.)
   (b) Määritä ideaalin I sivuluokat.
   (c) Määritä tekijärenkaan R/I yhteen- ja kertolaskutaulut.

3. Tutustu luentomateriaalin sivulla 12 olevaan esimerkkiin, jossa käsitellään rengasta $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ja sen ideaalia $I = \left\langle 3\sqrt{2} - 1 \right\rangle$.
   (a) Miltä ideaalin I alkiot näyttävät?
   (b) Miltä tekijärenkaan R/I alkiot näyttävät?
   (c) Selitä omin sanoin, mitä tarkoittaa, että renkaassa R/I pätee yhtälö $3\sqrt{2} = 1$.

4. Tutustu alalukuun 1.3, jossa käsitellään käänteisalkioiden lisäämistä monoidiin.
   (a) Osoita, että esimerkin relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.
   (b) Osoita, että relaatio $\sim$ on yhteensopiva tulomonoidin yhteenlaskun kanssa.
   (c) Tutkitaan tapausta $M = \mathbb{N}$. Tällöin relaatio $\sim$ voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmassa muodossa. Millaisessa?
   (d) Tutkitaan tapausta $M = \mathbb{N}$. Miltä näyttävät joukon $[(4, 11)]$ alkiot?

(e) Tutkitaan tapausta $M = \mathbb{N}$. Mitä tekijämodulin $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ alkiota kokonaisluku -3 vastaa?

(f) Monoidin M alkiota s kutsutaan supistuvaksi, jos kaikilla $a, b \in M$ pätee seuraava ehto:

$$\text{jos } a + s = b + s, \text{ niin } a = b.$$

Osoita, että jos monoidin M jokainen alkio on supistuva, kuvaus η on injektio.

5. (a) Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Q}, +)$. Osoita, että relaatio

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

on ekvivalenssirelaatio, joka on yhteensopiva laskutoimituksen $+$ kanssa.

(b) Osoita, että ekvivalenssiluokkien joukko $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on ääretön vaihdannainen ryhmä, jossa jokaisen alkion kertaluku on äärellinen.

6. (a) Kertaa ryhmä- ja rengashomomorfisien sekä lineaarikuvausten määritelmät. (Lineaarikuvaukset ovat vektoriavaruuksien välisiä homomorfismeja.) Mitä yhtäläisyyksiä määritelmissä on?

(b) Tutustu kurssimateriaalin alalukuun 0.5.

(c) *Reaalinen matriisialgebra* on joukon $\mathbb{R}^{n\times n}$ osajoukko, joka on suljettu yhteenlaskun, skalaarikertolaskun ja matriisikertolaskun suhteen sekä sisältää yhteen- ja kertolaskun neutraalialkiot. Miten määrittelisit matriisialgebrahomomorfismin?

(d) Onko c-kohdassa keksimässäsi määritelmässä ehtoja, jotka ovat itse asiassa turhia (eli seuraavat toisista ehdoista)?

7. (a) Määrittääkö ehto $[x]_4 \mapsto [x]_5$ kuvauksen ryhmästä $\mathbb{Z}_4$ ryhmään $\mathbb{Z}_5$?

(b) Määrittääkö ehto $[x]_8 \mapsto [x]_4$ kuvauksen ryhmästä $\mathbb{Z}_8$ ryhmään $\mathbb{Z}_4$?

(c) Keksi ja muotoile tulos, joka kertoo, milloin on olemassa homomorfismi $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$, jolle pätee $f([x]_n) = [x]_m$. Todista keksimäsi tulos. Kurssimateriaalin luvun 1.4 tuloksista on apua.

8. Halutaan osoittaa, että ryhmät $\mathbb{Z}_{10}$ ja $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ ovat isomorfisia.

(a) Todistuksen voisi periaatteessa tehdä osoittamalla, että kuvaus

$$g\colon \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \quad g([a]_{10}) = ([a]_2, [a]_5)$$

on isomorfismi. Miksi se ei kuitenkaan ole kannattava vaihtoehto?

(b) Osoita ryhmien homomorfialauseen avulla, että $\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$.

9. Olkoot M, G ja η kuten alaluvussa 1.3. Oletetaan lisäksi, että H on vaihdannainen ryhmä ja $f\colon M \to H$ monoidihomomorfismi.

Osoita, että on olemassa ryhmähomomorfismi $g\colon G \to H$, jolle pätee $f = g \circ \eta$.

10. Olkoon G äärellinen ryhmä, $\varphi\colon G \to M$ ryhmähomomorfismi ja $H \leq G$.

(a) Osoita, että $\varphi(H) \leq \varphi(G) \leq M$.

(b) Osoita, että indeksi $[\varphi(G) : \varphi(H)]$ jakaa indeksin $[G : H]$.

(c) Osoita, että kertaluku $|\varphi(H)|$ jakaa kertaluvun $|H|$.