HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2014, kotitentti (12.12.2014)

Tehtävissä, kaikki satunnaismuuttujat elävät todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) > 0$ P-melkein varmasti ja $K > 0$ (deterministinen). Osoita

$$E_P\big(X\mathbf{1}(X > K)\big) = \int_K^\infty P(X > t)dt + KP(X > t)$$

Ratkaisu. Tiedetään, että millä tahansa P-melkein varmasti epänegatiivisella satunnaismuuttujalla Y pätee

$$E_P(Y) = \int_0^\infty P(Y > t)dt.$$

Täten

$$\begin{aligned} E_P\big(X\mathbf{1}(X > K)\big) &= \int_0^\infty P(X\mathbf{1}(X > K) > t)dt \\ &= \int_K^\infty P(X\mathbf{1}(X > K) > t)dt + \int_0^K P(X\mathbf{1}(X > K) > t)dt \\ &= \int_K^\infty P(X > t)dt + \int_0^K P(X > K)dt \\ &= \int_K^\infty P(X > t)dt + KP(X > K). \end{aligned}$$

2. Osoita jos $|X_n| \xrightarrow{P} 0$ stokastisen konvergenssin mielessä, ja

$$\lim_{n\to\infty} \sup_n E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n| > K)\big) = 0$$

siitä seuraa $E(|X_n|) \to 0$.

Ratkaisu. Edellisen tehtävän perusteella

$$\begin{aligned} E_P(|X_n|) &= \int_0^\infty P(|X_n| > t)dt \\ &= \int_0^K P(|X_n| > t)dt + \int_K^\infty P(|X_n| > t)dt \\ &= \int_0^K P(|X_n| > t)dt + E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n| > K)\big) - KP(|X_n| > K). \end{aligned}$$

Nyt oletuksen perusteella

$$\limsup_{n\to\infty} E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n|>K)\big)=0,$$

stokastisen konvergenssin perusteella

$$\limsup_{n\to\infty} KP(|X_n|>K)=0$$

ja käänteisen Fatoun lemman ja stokastisen konvergenssin perusteella

$$0\le \limsup_{n\to\infty}\int_0^K P(|X_n|>t)dt \le \int_0^K \limsup_{n\to\infty} P(|X_n|>t)dt=0.$$

Siispä

$$\limsup_{n\to\infty} E_P(|X_n|)=0,$$

mikä odotusarvojen $E_P(|X_n|)$ positiivisuuden perusteella tarkoittaa sitä, että

$$\lim_{n\to\infty} E_P(|X_n|)=0.$$

3. Matemaatiisessa rahoitusteoriassa on tapana mallittaa osakkeen arvo $S(\omega)$ hetkellä $t>0$ log-normalisella jakaumalla, siis

$$S_t(\omega)=S_0\exp\bigg(\sigma\sqrt{t}G(\omega)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\bigg)$$

jossa $S_0>0$ on osakkeen arvo hetkellä 0 ja $G(\omega)\sim\mathcal{N}(0,1)$, eli P:n suhteen $G(\omega)$ on standardi gaussinen jolla

$$P(G\le x)=\int_{-\infty}^x \gamma(y)dy, \qquad \gamma(y)=\frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

Eurooppalainen optio on satunaissmuuttuja $H(\omega)=h(S_t(\omega))$, jossa $x\mapsto h(x)$ on mitallinen.

Option hinta hetkellä 0 on odotusarvo $c(t,S_0,\theta):=E_P(h(S_t))$ tietyn riskineutraali todennäköisyysmitan P suhteen.

(a) Oleta ensin että $x\mapsto h(x)$ on derivoituva ja osoita että saa viedä derivaattoja parametrien suhteen odotusarvon sisään, derivaattojen tasaisen integroivuuden nojaten, ja $c(t,S_0,\sigma)$ on derivoituva parametrien t,S_0 ja σ:n suhteen,

(b) Osoita että $c(t, S_0, \sigma)$ on derivoituva parametrien t, S_0 ja σ:n suhteen, myös silloin $h(x)$ ei olisi derivoituva, joillakin tasaisen integroivuuden oletuksilla.

Vihjeet

$$\begin{aligned} c(t, S_0, \sigma) &= \int_{\mathbb{R}} h\big(\exp\big(\log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t}y\big)\big)\gamma(y)dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} h\big(\exp(x)\big)\ \gamma\big(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t\big)dx \end{aligned}$$

muuttujan vaihdolla $x = \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma y\sqrt{t}$.
Muista myös $\frac{d}{dx}\gamma(x) = -x\gamma(x)$.

(c) Laske $c(t, S_0, \sigma)$, $\frac{\partial c(t,S_0,\sigma)}{\partial t}$, $\frac{\partial c(t,S_0,\sigma)}{\partial S_0}$, $\frac{\partial c(t,S_0,\sigma)}{\partial \sigma}$,
silloin kun $h(x) = (x - K)^+$ ja $h(x) = (x - K)^-$, $K > 0$, jossa $x^\pm = \max\{\pm x, 0\}$.

Vihje yhtälö nimeltä *osto-myynti pariteetti* pätee

$$S(\omega) - K = \big(S(\omega) - K\big)^+ - (K - S(\omega))^+$$

$\big(S_t(\omega) - K\big)^+$ kutsutaan eurooppalaiseksi osto-optioksi joka antaa oikeus mutta ei velvollisuutta ostaa yhden osakkeen maturiteetti hetkellä t ennalta sovitulla hinnalla K. Jos markkinahinta $S(\omega)$ on maturiteetin hetkellä korkeampi kun K, option haltija lunastaa optionsa, ostaa osakkeen hinnalla K ja kun myy heti sen pois saa voittoa $\big(S_t(\omega) - K\big)^+$. Jos $S \leq K$, osto-optio on silloin arvoton,

Vastaavasti $\big(S_t(\omega) - K\big)^-$ kutsutaan eurooppalainen myyntioptioksi.Tämän option haltijalla on oikeus (mutta ei velvollisuus) myydä maturiteettin hetkellä t yhden osakkeen ennalta sovitulla hinnalla K.

Ratkaisu. (a) Halutaan käyttää Lemmaa 8.0.3. On siis osoitettava, että $D_t h(S_t(\omega)), D_{S_0} h(S_t(\omega))$ ja $D_\sigma h(S_t(\omega))$ ovat tasaisesti integroituvia joillakin väleillä, jotta voidaan käyttää kyseistä lemmaa. Aloitetaan muuttujasta t. Olkoon $0 < t < a$ jollakin $a > 0$. Käytetään tasaisen integroituvuuden karakterisaatiota, jonka mukaan kokoelma satunnaismuuttujia on tasaisesti integroituva, jos kokoelman jäsenten L^p-normeille on olemassa yläraja jollakin $p > 1$. Luonnollinen valinta on $p = 2$. Tällöin laskemalla derivaatta auki ja käyttämällä Hölderin epäyhtälöä,

$$\begin{aligned}\| D_t h(S_t) \|_2 &= \| h'(S_t) S_t \left(\frac{\sigma G}{2\sqrt{t}} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \|_2 \\ &\leq \| h'(S_t) \|_4 \| S_t \left(\frac{\sigma G}{2\sqrt{t}} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \|_4 \\ &\leq \| h'(S_t) \|_4 \| S_t \|_8 \| \frac{\sigma G}{2\sqrt{t}} - \frac{\sigma^2}{2} \|_8 .\end{aligned}$$

Keskimmäinen termi on

$$\begin{aligned}\| S_t \|_8 &= S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} (E_P(e^{8\sigma\sqrt{t}G}))^{1/8} \\ &= S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} e^{4\sigma^{1/4} t^{1/8}} \\ &\leq S_0 e^{4\sigma^{1/4} a^{1/8}}\end{aligned}$$

jossa toinen epäyhtälö seuraa havainnosta, että odotusarvo normaalijakauman momenttifunktio ja käyttämällä kaavaa tälle funktiolle. Keskimmäinen termi on siis rajoitettu. Tutkitaan seuraavaksi tulon kolmatta termiä. Tähän voidaan käyttää Minkowskin epäyhtälöä,

$$\| \frac{\sigma G}{2\sqrt{t}} - \frac{\sigma^2}{2} \|_8 \leq \| \frac{\sigma G}{2\sqrt{t}} \|_8 + \| \frac{\sigma^2}{2} \|_8 = \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} \| G \|_8 + \frac{\sigma^2}{2},$$

joista termeistä jälkimmäinen on tietenkin rajoitettu. Ensimmäinen termi on myöskin rajoitettu, sillä normaalijakauman momenttien perusteella $\| G \|_8 = 105^{1/8}$. Siispä tulon kolmaskin termi on rajoitettu.

Jotta ensimmäinen termi olisi rajoitettu, täytyy olettaa jotakin, esimerkiksi, että h on rajoitettu funktio.

Tällöin voidaan sitten soveltaa Lemmaa 8.0.3, kun $0 < t < a$, sillä lemman muut oletukset ovat voimassa.

Toisille muuttujille S_0 ja σ tasainen integroituvuus nähdään samoin. Itseasiassa tämä on hiukan helpompaa. S_0:lle:

$$\| D_{S_0} h(S_t)) \|_2 \leq e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} \| h'(S_t) \|_4 \| e^{\sigma\sqrt{t}G} \|_4,$$

joka nähdään samalla tavalla ja vastaavilla oletuksilla rajoitetuksi kuten t:n ollessa integroitava muuttuja. Vastaavasti σ:lle:

$$\| D_\sigma h(S_t)) \|_2 \leq \| h'(S_t) \|_4 \| S_t \|_8 \| \sqrt{t}G - \sigma t \|_8,$$

joka sekin havaitaan rajoitetuksi.

Siispä derivaatat kaikkien muuttujien suhteen voidaan viedä integraalin sisälle kaikkialla sopivilla väleillä.

(b) Hyödynnetään vihjettä, joka mahdollistaa derivaatan tarkastelemisen derivoimatta funktiota h. Lasketaan ensin t:lle:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} h(e^x) D_t \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t) dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} h(e^x)(-\frac{1}{2\sigma t^{-\frac{3}{2}}} \gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \\
&\quad + \frac{\sigma}{2\sqrt{t}}(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t)) dx \\
&\quad = -\frac{1}{2t^2} \int_{\mathbb{R}} h(e^x) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t) dx \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{2} \int_{\mathbb{R}} h(e^x) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(\log S_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t) dx \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2} \int_{\mathbb{R}} h(e^x) x \gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t) dx \\
&\quad = \frac{\sigma^2}{2} E_P(h(S_t)G) - \left(\frac{1}{2t^2} + \frac{\sigma^2 \log S_0}{2} + \frac{\sigma^4 t}{4}\right) E_P(h(S_t)) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sigma^2}{2} h(S_t) x - \left(\frac{1}{2t^2} + \frac{\sigma^2 \log S_0}{2} + \frac{\sigma^4 t}{4}\right) h(S_t)\right) \gamma(x) dx.
\end{aligned}
$$

Kuten a-kohdassa, voidaan L^2-normin avulla osoittaa, että integraalin sisällä olevien satunnaismuuttujien kokoelma on tasaisesti integroituva, kun t on jollakin sopivalla välillä $(0 < t < a)$ ja tehdään jokin sopiva rajoittuneisuusoletus funktiosta h. Siispä derivaatta t:n suhteen voidaan siirtää odotusarvon sisään, vaikkei h olisikaan derivoituva. Vastaavasti ottamalla muuttujiksi S_0 tai σ, saadaan

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} h(e^x) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} D_{S_0} \gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t) dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} h(e^x) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t}{S_0} \gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t) dx, \\
&\int_{\mathbb{R}} h(e^x) \frac{1}{D_\sigma} \sigma\sqrt{t} \gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t) dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} h(e^x) \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t) - \frac{1}{\sigma^2\sqrt{t}} \gamma(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\right) dx,
\end{aligned}
$$

joista voidaan jatkaa vastaavasti kuin t:n tapauksessa.

(c) Olkoon $h(x) = (x - K)^+$. Tällöin

$$\begin{aligned} E_P(h(S_t)) &= \int_{\mathbb{R}} \max(S_0 e^{\sigma\sqrt{t}x - \frac{1}{2}\sigma^2 t} - K, 0)\gamma(x)dx \\ &= \int_a^\infty (S_0 e^{\sigma\sqrt{t}x - \frac{1}{2}\sigma^2 t} - K)\gamma(x)dx, \end{aligned}$$

missä a alaraja, jolloin

$$S_0 e^{\sigma\sqrt{t}x - \frac{1}{2}\sigma^2 t} > K.$$

Helposti lasketaan, että

$$a = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \log \frac{K e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}}{S_0}.$$

Siispä, ottamalla käyttöön merkintä Φ normaalijakauman kertymäfunktiolle sekä täydentämällä neliö eksponentissa,

$$\begin{aligned} E_P(h(S_t)) &= S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \int_a^\infty e^{\sigma\sqrt{t}x}\gamma(x)dx - K\int_a^\infty \gamma(x)dx \\ &= S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \int_a^\infty e^{\sigma\sqrt{t}x}\gamma(x)dx - (1 - \Phi(a))K \\ &= S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \int_a^\infty \gamma(x - \sigma\sqrt{t})e^{(\sigma^2 t)/2}dx - (1 - \Phi(a))K \\ &= S_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}(1 - \Phi(a - \sigma\sqrt{t})) - (1 - \Phi(a))K. \end{aligned}$$

Jos $h(x) = (x - K)^-$, menevät laskut vastaavalla tavalla. Lasketaan vielä derivaatat, kun $h(x) = (x - K)^+$ ($h(x) = (x - K)^-$ hoituu tietenkin vastaavasti),

$$\begin{aligned} D_t E_P(h(S_t)) &= S_0 D_t e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}(1 - \Phi(a - \sigma\sqrt{t})) + K D_t \Phi(a) \\ &= S_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(1 - \Phi(a - \sigma\sqrt{t})) + \gamma(a - \sigma\sqrt{t})\left(\frac{\sigma}{4\sqrt{t}} + \frac{\log K}{2\sigma t^{3/2}}\right)\right) \\ &\quad + K\gamma(a)\left(\frac{\sigma}{4\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sigma t^{3/2}}\right), \\ D_{S_0} E_P(h(S_t)) &= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}\left((1 - \Phi(a - \sigma\sqrt{t})) + \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\gamma(a - \sigma\sqrt{t})\right) + \frac{K\gamma(a)}{\sigma\sqrt{t}S_0}, \\ D_\sigma E_P(h(S_t)) &= S_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}\left(\sigma t(1 - \Phi(a - \sigma\sqrt{t})) + \gamma(a - \sigma\sqrt{t})\left(\sqrt{t} + \frac{\log K}{\sigma^2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sigma^2} - \frac{\log S_0}{\sigma^2\sqrt{t}}\right)\right. \\ &\quad - \frac{K}{\sigma^2\sqrt{t}}\gamma(a)\left(\log K + \frac{\sqrt{t}}{2} - \log S_0\right). \end{aligned}$$

4. Osoita että $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ varustettuna olennaisen supremum normilla on täydellinen normi-avaruus.

$$\| X \|_\infty = P\text{-esssup}_\omega\big\{|X(\omega)|\big\} = \inf\big\{ K \in \mathbb{R} : P(|X| > K) = 0\big\}$$

Ratkaisu. Selvästikin $\| X \|_\infty = 0$ vain jos $X = 0$ melkein varmasti. Samoin selvästi kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$ pätee $\| \alpha X \|_\infty = |\alpha| \| X \|_\infty$.

Koska $\| X \|_\infty = \lim_{p\to\infty} \| X \|_p$ ja L^p-avaruudessa ($p < \infty$) pätee kolmioepäyhtälö (Minkowskin epäyhtälö), saadaan

$$\begin{aligned}\| X + Y \|_\infty &= \lim_{p\to\infty} \| X + Y \|_p \\ &\le \lim_{p\to\infty} \| X \|_p + \lim_{p\to\infty} \| Y \|_p \\ &= \| X \|_\infty + \| Y \|_\infty .\end{aligned}$$

Vielä on osoitettava, että L^∞ on täydellinen.

Olkoon X_n Cauchy-jono olennaisen supremumin normin suhteen. Kaikilla n, m pätee P-melkein varmasti, että

$$|X_n(\omega) - X_m(\omega)| \le \| X_n - X_m \|_\infty . \tag{0.1}$$

Täten jono X_n rajoitettuna joukkoon, jossa ylläolevan epäyhtälö pätee varmasti, suppenee tasaisesti euklidisen normin $|\cdot|$ suhteen. Merkitään tätä jonoa $\bar{X}_n$:llä ja sen raja-arvoa $\bar{X}$:llä, jolla siis pätee $|\bar{X}_n - \bar{X}| \to 0$ tasaisesti. Koska L^∞-avaruudessa käsitellään satunnaismuuttujien ekvivalenssiluokkia, voidaan asettaa $X_n(\omega) = 0$ niillä ω, joilla (0.1) ei päde kaikilla n, m. Tällöin, määrittelemällä $X(\omega) = \bar{X}(\omega)$ niillä ω, joilla (0.1) pätee kaikilla n, m ja $X(\omega) = 0$ muulloin, nähdään tasaisen suppenemisen nojalla, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa N siten että kaikilla $n > N$ pätee

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \le \epsilon$$

kaikilla ω. Täten

$$P(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon) = 0,$$

joten

$$\| X_n - X \|_\infty \le \epsilon,$$

mikä tarkoittaa sitä, että

$$\| X_n - X \|_\infty \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siispä L^∞ on täydellinen.

5. Olkoon $\{\ U_n(\omega)\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ P-rippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttuja jolla

$$P(U_1 \in (a_1, b_1], \ldots, U_n \in (a_n, b_n]\ ) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$$

$\forall 0 \le a_i < b_i \le 1$.

Olkoon $X_n(\omega) = \max\big\{\ U_1(\omega), \ldots, U_n(\omega)\big\}$

(a) Osoita että $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 1$ P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ avaruudessa.

(b) Laske odotusarvo $E_P(X_n)$.

(c) Osoita myös että minimien jonolla $Y_n(\omega) := \min\big\{\ U_1(\omega), \ldots, U_n(\omega)\big\}$ pätee $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = 0$ P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ avaruudessa.

(d) Laske odotusarvo $E_P(Y_n)$.
Vihje : Koska $U_1(\omega)$ ja $(1 - U_1(\omega))$ ovat samoin jakautuneita, voisit osoittaa että Y_n ja $(1 - X_n)$ ovat samoin jakautuneita.

Ratkaisu. (a) Nähdään, että kaikilla $0 \le a \le 1$ pätee

$$P(X_n \le a) = P(U_1, \ldots, U_n \le a) = a^n.$$

Koska X_n on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, on raja-arvo $X_n \to X$ olemassa. Nyt kaikilla $0 \le a < 1$ pätee kasvavuuden nojalla

$$P(X \le a) \le P(X_n \le a) = a^n \to 0,$$

joten $P(X < 1) = 0$, eli $\lim_{n\to\infty} X_n = 1$ P-melkein varmasti. Monotonisen konvergenssin lauseen perusteella pätee tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} X_n dP = 1.$$

(b)

$$\begin{aligned} E_P(X_n) = E_P(\max(U_1, \ldots, U_n)) &= \int_0^1 P(\max(U_1, \ldots, U_n) > t) dt \\ &= \int_0^1 (1 - P(\max(U_1, \ldots, U_n) < t)) dt \\ &= \int_0^1 (1 - t^n) dt \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(c) ja (d) Koska kaikilla $0 \le a \le 1$ pätee

$$P(Y_n \ge a) = (1-a)^n,$$

nähdään vastaavalla tavalla kuin kahdessa ensimmäisessä kohdassa, että $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0$ P-melkein varmasti ja $E_P(Y_n) = 1/(n+1) \to 0$, mitkä haluttiinkin näyttää.

6. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $N(\omega)$ Poisson(λ) satunnaismuuttuja, parametrilla $\lambda > 0$, jolla

$$P_\lambda(N = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

olkoon $(X_k(\omega) : \ k \in \mathbb{N})$ P-riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen jono, jossa X_1 on θ-ekponentiaalinen parametrilla $\theta > 0$, eli

$$P_\theta(X_1 > t) = \exp\bigl(-\theta t\bigr), \quad t \ge 0 \ .$$

ja jono $(X_k : k \in \mathbb{N})$ on myös P riippumaton satunnaismuuttujasta N.

Muistetaan että reaaliarvoisten satunnaismuuttujen kokoelman $\{X_j(\omega)\}_{j\in\mathcal{J}}$ virittämän σ-algebra

$$\sigma\bigl(X_j(\omega) : j \in \mathcal{J}\bigr)$$

on pienin σ-algebra joka sisältää joukot

$$\{\omega : (X_{j_1}(\omega), X_{j_2}(\omega), \dots, X_{j_n}(\omega)) \in B_n\}$$

jossa $n \in \mathbb{N}$, $\{j_1, \dots j_n\} \subseteq \mathcal{J}$ on äärellinen indeksien alijoukko ja $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ on Borelin joukko.

Olkoon

$$Y(\omega) := \min\bigl\{\ X_k(\omega) : 1 \le k \le N(\omega)\bigr\}$$

(a) Osoita että $Y(\omega)$ on satunnaismuuttuja.

(b) Laske ehdolliset odotusarvot

$$E_P(Y|\sigma(N))(\omega) \quad , \ E_P(Y|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega) \ ,$$
$$E_P(Y^2|\sigma(N))(\omega) \quad \text{ja} \ \ E_P(Y^2|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega).$$

(c) Laske odotusarvot

$$E_P(Y), \quad E_P(Y^2).$$

Ratkaisu. (a) On siis osoitettava, että Y on mitallinen kuvaus. Tämän osoittamiseksi riittää näyttää, että joukko $\{\, \omega : Y(\omega) \leq a\}$ on mitallinen jokaisella $a \in \mathbb{R}$. Tämä nähdään helposti, sillä

$$\begin{aligned}
\{\, \omega : Y(\omega) \leq a\} &= \{\, \omega : X_k(\omega) \leq a \text{ kaikilla } 1 \leq k \leq N(\omega)\} \\
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{\, \omega : X_k(\omega) \leq a \text{ ja } 1 \leq k \leq N(\omega)\} \\
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\{\, \omega : X_k(\omega) \leq a\} \cap \{\, \omega : 1 \leq k \leq N(\omega)\}\right),
\end{aligned}$$

joka on mitallisten joukkojen numeroituvana leikkauksena mitallinen, sillä $\{\, \omega : X_k(\omega) \leq a\}$ ja $\{\, \omega : 1 \leq k \leq N(\omega)\}$ ovat kuvausten X_k ja N mitallisuuden nojalla mitallisia.

(b) Kun $n = N(\omega)$, saadaan

$$\begin{aligned}
E_P(Y|\sigma(N))(\omega) &= E_P(\min\{\, X_k(\omega) : 1 \leq k \leq N(\omega)\}|\sigma(N))(\omega) \\
&= E_P(\min\{\, X_k(\omega) : 1 \leq k \leq n\}) \\
&= \int_0^\infty P(\min_{1\leq k\leq n} X_k > t)dt \\
&= \int_0^\infty \exp(-\theta n t)dt \\
&= \frac{1}{\theta n},
\end{aligned}$$

eli $E_P(Y|\sigma(N))(\omega) = \frac{1}{\theta N(\omega)}$.

Lasketaan vastaavasti kuin edellä, merkiten $x_k = X_k(\omega)$,

$$\begin{aligned}
E_P(Y|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega) &= E_P(\min\{\, X_k(\omega) : 1 \leq k \leq N(\omega)\}|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega) \\
&= E_P(\min\{\, x_k : 1 \leq k \leq N\}) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \min\{\, x_k : 1 \leq k \leq n\} P(N = n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \min\{\, x_k : 1 \leq k \leq n\} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!},
\end{aligned}$$

joten

$$E_P(Y|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \min\{\, X_k(\omega) : 1 \leq k \leq n\} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Kuten aikaisemmin, ottamalla $n = N(\omega)$ ja käyttämällä lisäksi satunnaismuuttujien X_k epänegatiivisuutta,

$$\begin{aligned} E_P(Y^2|\sigma(N))(\omega) &= E_P(\min\{\, X_k(\omega)^2 : 1 \leq k \leq n\}) \\ &= \int_0^\infty P(\min_{1\leq k\leq n} X_k^2 > t)dt \\ &= \int_0^\infty P(\min_{1\leq k\leq n} X_k > \sqrt{t})dt \\ &= \int_0^\infty \exp(-\theta n\sqrt{t})dt \\ &= \frac{2}{(\theta n)^2}, \end{aligned}$$

joten $E_P(Y^2|\sigma(N))(\omega) = \frac{2}{(\theta N(\omega))^2}$.

Samaten nähdään, että

$$E_P(Y^2|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \min\{\, X_k(\omega)^2 : 1 \leq k \leq n\} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}.$$

(c) Koska $E_P(Y) = E_P(E_P(Y|\sigma(N)))$ (tai $E_P(E_P(Y|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})))$, niin

$$\begin{aligned} E_P(Y) = E_P(E_P(Y|\sigma(N))) &= E_P\left(\frac{1}{\theta N(\omega)}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\theta n}P(N = n) \\ &= \frac{\exp(-\lambda)}{\theta}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{(n-1)!n^2}, \end{aligned}$$

jota ei vaikuta pystyvän esittämään siististi alkeisfunktioiden avulla.

Vastaavasti $E_P(Y^2) = E_P(E_P(Y^2|\sigma(N)))$ (tai $E_P(E_P(Y^2|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})))$, joten

$$\begin{aligned} E_P(Y^2) = E_P(E_P(Y^2|\sigma(N))) &= E_P\left(\frac{2}{(\theta N(\omega))^2}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{(\theta n)^2}P(N = n) \\ &= \frac{\exp(-\lambda)}{\theta^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{(n-1)!n^3}. \end{aligned}$$