Todennäköisyysteoria II , koe (30.10.2014)

Valitse kolme tehtävää neljän tehtävän listasta $\{1, 2, 3, 4\}$ ja vastaa tehtävien kysymyksiin. Jos jää aikaa voit toki vastata myös neljannen tehtävän kysymyksiin. Kokeen kesto on neljä tuntia.

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ samoin jakautuneita satunnaismuuttujat tiheysfunktiolla

$$p_X(x) = \begin{cases} cx^{-r} & \text{kun } x \geq 1 \\ 0 & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

jossa $r > 1$.

i) Laske normalisointivakion arvo c.

ii) Esitä riittävä ehto parametrille r:lle jotta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} = 0 \quad P\text{-melkein varmasti}$$

Vihje Muista Borel-Cantellin lemma !

2. Olkoon $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ $(Y_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(Z_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ satunnaismuuttujen jonot joille P-melkein varmasti

$$X_n(\omega) \leq Y_n(\omega) \leq Z_n(\omega) \text{ ja}$$
$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \to X(\omega) \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) \to Y(\omega) \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) \to Z(\omega)$$

jossa $X(\omega) \leq Y(\omega) \leq Z(\omega)$ P-melkein varmasti.

Oletamme sen lisääksi:

$X(\omega), X_n(\omega) \in L^1(P)$ $\forall n$, ja $\lim_{n\to\infty} E_P(X_n) \to E_P(X)$

$Z(\omega), Z_n(\omega) \in L^1(P)$ $\forall n$, ja $\lim_{n\to\infty} E_P(Z_n) \to E_P(Z)$.

Osoita että $E_P(X_n(\omega)) \to E_P(X)$.

Vihje Käytä huolellisesti dominoidun konvergenssin lausetta.

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomat ja samoin jakautuneet binääri satunnaismuuttujat joilla $P(X_n = 1) = 1/2 = 1 - P(X_n = 0)$.

Olkoon

$$Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k(\omega)$$

i) Osoita että satunnaissarja $Y_n(\omega)$ suppenee P-melkein varmasti kohti rajaan

$$Y(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k(\omega)$$

ii) Osoita että $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$ $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avaruuden normissa kaikille $p \geq 1$, siis $E_P(|Y_n - Y|^p) \to 0$.

iii) Osoita että $P(Y \in [0,1]) = 1$ ja $P(Y \leq t) = t$ kun $t \in [0,1]$, siis $Y(\omega)$ on tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$.

iv) Osoita että $P(Y \in \mathbb{Q}) = 0$ jossa $\mathbb{Q}$ on rationaali-lukujen joukko.

4. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumatomien satunnaismuutujen jono, jossa

$$P(X_j = k) = \exp(-\lambda_j) \frac{\lambda_j^k}{k!}$$

siis X_j on Poisson(λ_j) jakautunut jossa $\lambda_j > 0$.

Oletamme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n} = \lambda \in (0, +\infty)$$

Osoita että satunnaismuuttujen jono

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \big(X_1 + \cdots + X_n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \big)$$

suppenee jakauman mielessä ja määrää rajajakauma.

5. Olkoon satunnaismuuttujat $X(\omega), Y(\omega)$ in $L^1(P)$.

i) Osoita: $M(\omega) := \max(X(\omega), Y(\omega)) \in L^1(P)$.

Jatkossa oletamme $X \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} Y$, siis

$$P(\{X \leq t\} \cap \{Y \leq s\}) = F_X(t) F_Y(s)$$

jossa $F_X(t) = P(X \leq t)$, $F_Y(s) = P(Y \leq s)$ ovat satunnaismuutujen kertymäfunktiot.

ii) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(X|\sigma(M))(\omega)$

iii) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(M|\sigma(X))(\omega)$

R

$$\begin{aligned}&F_M(z) = P(M \le z) = P(X \le z)P(Y \le z) = F_X(z)F_Y(z),\\ &f_M(z) = F_Y(z)f_X(z) + F_X(z)f_Y(z)\end{aligned}$$

$$E_P(X|\sigma(M))(\omega) = \frac{MF_Y(M)f_X(M) + \left(\int_{-\infty}^{M} xF_X(dx)\right)f_Y(M)}{F_Y(M)f_X(M) + F_X(M)f_Y(M)}$$

$$\begin{aligned}&E_P(g(M)X) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\big(g(x)x\mathbf{1}(y<x) + g(y)x\mathbf{1}(x \le y)\big)F_X(dx)F_Y(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)xF_X(y)F_X(dx) + \int_{\mathbb{R}} g(y)\left(\int_{-\infty}^{y} xF_X(dx)\right)F_X(dy) =\\ &\int_{\mathbb{R}} g(x)xF_Y(x)f_X(x)dx + \int_{\mathbb{R}} g(y)\left(\int_{-\infty}^{y} xF_X(dx)\right)f_Y(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{zF_Y(z)f_X(z) + \int_{-\infty}^{z} xF_X(dx)f_Y(z)}{F_Y(z)f_X(z) + F_X(z)f_Y(z)} g(z)(F_Y(z)f_X(z) + F_X(z)f_Y(z))dz\\ &= E_P\left(\frac{MF_Y(M)f_X(M) + \left(\int_{-\infty}^{M} xF_X(dx)\right)f_Y(M)}{F_Y(M)f_X(M) + F_X(M)f_Y(M)}\right)\end{aligned}$$