HY Todennäköisyysteoria II, kesä 2014, kurssikoe (7.8.2014)

Valitse kolme tehtävää tästä neljän tehtävän listasta 1,2,3,4, ja vastaa tehtävien kysymyksiin. Jos jää aikaa voit toki vastata myös neljanteen tehtävään. Kokeen kesto on neljä tuntia.

Kaikissa tehtävissä, kaikki satunnaismuuttujat elävät todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Muistetaan tasaisen integroituvuuden määritelmä: satunnaismuuttujen joukko $\mathcal{C} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on tasaisesti integroituva jos ja vain jos

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > K)\big) = 0$$

Osoita

(a) jos on olemassa $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jolla

$$\sup_{X\in\mathcal{C}}\big\{ \, |X(\omega)|\big\} \le Y(\omega), \qquad P \text{ m.v.}$$

siitä seuraa että $\mathcal{C}$ on tasaisesti integroituva.

(b) jos on olemassa $p > 1$ jolla

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\big(| \, X|^p\big) < \infty$$

siitä seuraa että $\mathcal{C}$ on tasaisesti integroituva.

(c) Tämä on ylimääräinen kysyms josta on mahdollisuus saada lisäpisteitä, ei se mitään jos ei tule heti mieleen:
Pelkästään oletuksesta

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\big(| \, X|\big) < \infty$$

ei seura että $\mathcal{C}$ olisi tasaisesti integroituva. Esitä vastaesimerkki, siis satunnaismuuttujen joukko joka on rajoitettu $L^1(P)$ normissa mutta ei ole tasaisesti integroituva

2. Olkoon N Poisson jakautunut parametrilla $\lambda > 0$, eli

$$P_\lambda(N = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$$

Poissonin jakauman momentti generoiva funktio on

$$\psi_\lambda(t) = E_\lambda\big(\exp(tN)\big) = \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(\lambda\exp(t)\big)^k}{k!} = \exp\Big(\lambda(\exp(t)-1)\Big)$$

Laske $E_\lambda(N)$, $E_\lambda(N^2)$.

Vihje Laske momentti generoiva funktion derivaatat $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\psi_\lambda(t)$ pisteessaa $t=0$, $k=1,2$. Perustele derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihto.

Muistetaan että riittävä ehto identiteetille

$$\frac{\partial}{\partial t}E_P\big(f(X,t)\big)\Big|_{t=t_0} = E_P\left(\frac{\partial}{\partial t}f(X,t)\Big|_{t=t_0}\right)$$

on satunnaismuuttujen joukon

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}f(X,t) : t\in U\right\}$$

tasainen integroituvuus, jossa $t_0\in U$ ja U on avoin joukko.

3. Olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja jolla on

$$P(G\le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

ja momentti generoiva funktio

$$\phi(t) = E_P\big(\exp(tG)\big) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Olkoon $N(\omega)$ Poisson jakautunut satunnaismuuttuja parametrilla $\lambda > 0$:

$$P_\lambda(N=k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!},\quad k\in\mathbb{N}$$

Oletamme että G ja N ovat P-riippumattomia.

(a) Laske satunnaismuuttujan $N(\omega)G(\omega)$ momentti-generoiva funktio

$$E_P(\exp(tNG))$$

Vihje Käytä Fubinin lausetta kun integroit tuloavaruudessa. Valitse integroinnin järjestystä.

(b) Osoita

$$E_P\left(\frac{d^m}{dt^m}\exp(tG)\right) = \frac{d^m}{dt^m}E_P\big(\exp(tG)\big) = \frac{d^m}{dt^m}\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) =$$
$$\frac{d^m}{dt^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^m}{dt^m}\frac{t^{2k}}{2^k k!}$$

perustelemalla derivoinnin ja integroinnin, ja derivoinnin ja sarjan järjestyksen vaihtoa.

(c) Osoita

$$E_P(G^{2n}) = \frac{(2n)!}{n!2^n}, \quad E_P(G^{2n+1}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vihje Laske Gaussisen momentti generoiva funktion m-kertaisia derivaattoja pisteessä $t = 0$.

4. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
olkoon satunnaismuttuja $U(\omega) \in [0,1]$ tasaisesti jakautunut eli

$$P(U \in (a,b]) = (b-a) \text{ kun } (a,b] \subseteq [0,1],$$

ja olkoon satunnaismuuuttuja $N(\omega)$ Poisson(λ) jakautunut, siis

$$P(N = k) = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^k}{k!}$$

Oletamme että $N \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} U$, eli N ja U ovat rippumattomia satunnaismuuttujat P-mitan suhteen.

Olkoon satunnaismuuttuja $Y(\omega) := \big(U(\omega)\big)^{N(\omega)}$.

(a) Kirjoita Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmä.

(b) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(Y|\sigma(U))(\omega)$.

(c) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(Y|\sigma(N))(\omega)$.

(d) Laske odotusarvo $E_P(Y)$.