HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, kurssikoe (14.11.2013)

Valitse kolme tehtävää tästä neljän tehtävän listasta ja vastaa tehtävien kysymyksiin. Jos jää aikaa voit toki vastata myös neljanteen tehtävään. Kokeen kesto on neljä tuntia.

Kaikissa tehtävissä, kaikki satunnaismuuttujat elävät todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Olkoon $X(\omega) \in \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja.

   (a) Laske

   $$\frac{d}{dt} E_P\Big(\sin(X+t)\Big), \quad \frac{d}{dt} E_P\Big(\cos(X+t)\Big),$$

   jossa $t \in \mathbb{R}$ on parametri. Perustele integroinnin ja derivoinnin järjestyksen vaihto.

   (b) Oletamme nyt $X \in L^n(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jossa $n \in \mathbb{N}$. Laske

   $$\frac{d^n}{dt^n} E_P\Big(\sin(tX)\Big), \quad \frac{d^n}{dt^n} E_P\Big(\cos(tX)\Big)$$

   jossa $t \in \mathbb{R}$ on parametri. Perustele integroinnin ja derivoinnin järjestyksen vaihto.

   (c) Muistetaan että kun $i = \sqrt{-1}$ jolla $i^2 = -1$,

   $$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \in \mathbb{C}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

   Laske

   $$\frac{d^n}{dt^n} E_P\big(\exp(itX)\big)$$

2. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $q > 1$.

   (a) Olkoon

   $$\sup_n E_P(|X_n|^q) < \infty$$

   Osoita: jono $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva.
   Vihje

   $$|X_n(\omega)|^q \geq K^{q-1}|X_n(\omega)| \ \ \mathbf{1}(|X_n(\omega)| > K), \quad \forall K > 0.$$

(b) Osoita :

$$E_P(|X|^q) = q\int_0^\infty t^{q-1} P(|X| > t)dt. \qquad \text{Käytä Fubini !}$$

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

   olkoon satunnaismuttuja $U(\omega) \in [0,1]$ tasaisesti jakautunut eli

   $$P(U \in (a,b]) = (b-a) \text{ kun } (a,b] \subseteq [0,1],$$

   ja olkoon satunnaismuuuttuja $N(\omega)$ Poisson(1) jakautunut, siis

   $$P(N = k) = \frac{\exp(-1)}{k!}$$

   Oletamme että $N \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} U$, eli N ja U ovat rippumattomia satunnaismuuttujat P-mitan suhteen.

   Olkoon satunnaismuuttuja $Y(\omega) := \big(U(\omega)\big)^{N(\omega)}$.

   (a) Kirjoita Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmä.

   (b) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(Y|\sigma(U))(\omega)$.

   (c) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(Y|\sigma(N))(\omega)$.

   (d) Laske odotusarvo $E_P(Y)$.

4. Olkoon $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ P-riippumattomia ja samoinjakautuneita satunnausmuuttujia joilla on sama kertymäfunktio $F(t) = P(X_i \le t)$, $i \in \mathbb{N}$.

   Otoksen $(X_1, \dots, X_n)$ empiirinen jakauma on satunnaisprosessi $(F_n(t,\omega) : t \in \mathbb{R})$

   $$F_n(t,\omega) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i(\omega) \le t) \qquad n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}$$

   (a) Osoita: $E_P(F_n(t)) = F(t)$.

   (b) Osoita: $\forall t \in \mathbb{R}$,

   $$F_n(t,\omega) \to F(t)$$

   P melkein varmasti kun $n \to \infty$.

   Vihje Muista vahva suurten lukujen laki.

   (c) Laske $E_P(\mathbf{1}(X_i \le s)\mathbf{1}(X_j \le t))$ jossa $i,j \in \mathbb{N}$, $s,t \in \mathbb{R}$.

(d) Laske kovarianssi

$$\mathrm{Cov}(F_n(t), F_m(s)) = \int_\Omega \big(F_n(t,\omega) - F(t)\big)\big(F_m(s,\omega) - F(s)\big) P(d\omega)$$

kun $n, m \in \mathbb{N}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

(e) Osoita että $\sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) \xrightarrow{d} G(t)$ jossa $G(t)$ on gaussinen. Mitkä ovat on $E(G(t))$, $E(G(t)G(s))$ kun $t, s \in \mathbb{R}$?

Vihje Muista keskeisen raja-arvon lause.