HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteorian erilliskokeen ratkaisut **22.12.2009**

1. (a) Todista toinen Borel-Cantellin lemma: jos tapahtumat $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ ovat keskenään riippumattomia P-mitan suhteen, silloin

$$P(\limsup_k A_k) = 1 \text{ kun } \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$$

Vihje: $\limsup_k A_k = \liminf_k(A_k^c)$. Käytä tapahtumien riippumattomuus ja epäyhtälö $(1-x) \leq \exp(-x)$.

R.

$$P(\limsup_k A_k) = 1 - P((\limsup_k A_k)^c) = 1 - P(\liminf A_k^c) = 1 - P\Big(\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k^c)\Big)$$

jossa tapahtumien riipumattomuudesta seuraa

$$P\Big(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = \prod_{k \geq n}(1 - P(A_k)) \leq \prod_{k\geq n} \exp(-P(A_k)) = \exp\Big(-\sum_{k\geq n} P(A_k)\Big)$$
$$= \exp(-\infty) = 0$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$

Siksi

$$P\Big(\bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k^c\Big) \leq \sum_n P\Big(\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k^c\Big) = 0$$

ja väite on osoitettu

(b) Esitä yksinkertäinen vastaesimerkki jonosta $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ jossa tapahtumat eivät ole P-riippumattomia ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty \quad \text{ja} \quad P(\limsup_k A_k) < 1$$

R. Olkoon $A_k = A$ jolla $0 < P(A) < 1$. Silloin

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A) = +\infty$$

mutta $\limsup_k A_k = A$ ja $P(A) < 1$.

2. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujat. Määritellään

$$d(X,Y) := E\Big(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\Big)$$

Olkoon $(X_n : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujien jono.

(a) Kirjoita stokastisen konvergenssin määritelmä.

R. $X_n \xrightarrow{P} 0$ kun $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$$

(b) Todista: kun $X_n \xrightarrow{P} Y$ (stokastisen konvergenssin mielessä), seuraa $d(X_n, Y) \to 0$.

R. Olkoon $\widetilde{X}_n(\omega) = X_n(\omega) - Y(\omega)$. Selvästi $d(X_n, Y) = d(\widetilde{X}_n, 0)$
Huomataan että kuvaus $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ on ei-vähenevä. Koska $\forall \varepsilon \geq 0$

$$\frac{|\widetilde{X}_n(\omega)|}{1 + |\widetilde{X}_n(\omega)|} \leq \mathbf{1}(|\widetilde{X}_n(\omega)| > \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

seuraa

$$d(\widetilde{X}_n, 0) \leq P(|\widetilde{X}_n(\omega)| > \varepsilon) + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

kun n on tarpeeksi suuri, eli $d(\widetilde{X}_n, 0) \to 0$.

(c) Todista: kun $d(X_n, Y) \to 0$, seuraa $X_n \xrightarrow{P} Y$ (stokastisen konvergenssin mielessä).

R. Chebychevin epäyhtälön avulla, koska $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathbf{1}(|\widetilde{X}_n(\omega) > \varepsilon) \leq \frac{|\widetilde{X}_n(\omega)|}{1 + |\widetilde{X}_n(\omega)|}$$

seuraa

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} P(|\widetilde{X}_n| > \varepsilon) \leq E_P\Big(\frac{|\widetilde{X}_n|}{1 + |\widetilde{X}_n|}\Big) \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty.$$

3. Olkoon (X_n) riippumattomien ja samoinjakautuneiden satunnaismuuttujen jono, joiden arvot ovat $(0, \infty)$ joukossa. Oletetaan että $E(\log X_1) < \infty$.

Osoita että P-melkein varmasti

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\prod_{k=1}^{n} X_k\Big)^{1/n} = \exp(\ E[\ \log(X_1)\ ]\ )$$

Vihje Muista Kolmogorovin suurten lukujen laki.

R. Kolmogorovin suurten lukujen lain nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\prod_{k=1}^{n} X_k(\omega)\Big)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \exp\Big(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \log(X_k(\omega))\Big) \to \exp(E_P(\log(X_1)))$$

P melkein varmasti.

4. (a) Esitä Fubinin lauseen todistuksen linja, monotonisen konvegenssi lauseen kautta:
kun P-melkein varmasti $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$, seuraa $E_P(X_n) \uparrow E_P(X)$.

R. Katso esim. luennoitsijan muistinpanoista Teoreema 1.11.2.
Olkoon $X(\omega) \in [0, \infty)$ satunnaismuuttuja.

(b) Osoita että

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt$$

R.

$$E_P(X) = \int_0^\infty x F_X(dx) = \int_0^\infty \Big(\int_{[0,x)} dy \Big) F_X(dx) = \text{ (Fubini) } = \int_0^\infty \Big(\int_{(y,\infty)} F_X(dx) \Big) dy$$
$$= \int_0^\infty (1 - F(y))dy = \int_0^\infty P(X > t)dt$$

(c) Pääteekö

$$E(X) \stackrel{?}{=} \int_0^\infty P(X \geq t)dt \ ,$$

myös silloin kun kertymäfunktio $F_X(t) = P(X \leq t)$ ei ole jatkuva ?
R.

$$\int_0^\infty P(X > t)dt - \int_0^\infty P(X \geq t)dt = \int_0^\infty P(X = t)dt = \int_0^\infty \Delta F_X(t)dt = 0,$$
$$\text{koska} \qquad \text{Lebesgue}\Big(\{ t : F_X(t) > F_X(t-) \} \Big) = 0$$

koska $F_X(t)$ on ei-vähenevä ja sillä on korkeintaan numeroituva määrä epäjatkuvuuspisteitä. Numeroituvan joukon Lebesguen mitta on nolla.
Tai vielä helpommin, koska

$$x = \int_{[0,x)} dy = \int_{[0,x]} dy$$

voidaan myös suoraan kirjoittaa

$$E_P(X) = \int_0^\infty x F_X(dx) = \int_0^\infty \Big(\int_{[0,x]} dy \Big) F_X(dx) = \text{ (Fubini) } = \int_0^\infty \Big(\int_{[y,\infty)} F_X(dx) \Big) dy$$
$$= \int_0^\infty (1 - F(y-))dy = \int_0^\infty P(X \geq y)dy$$

5. Olkoon $(X_1, \ldots, X_n)$ riippumattomia ja samoinjakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan että $X_1 \in L^1(P)$, ja olkoon

$$S_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

(a) Kirjoita Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmä.
R. Kun $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ on ali-σ-algebra,
$Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$
jos ja vain jos $Y(\omega)$ on $\mathcal{G}$-mitallinen ja

$$E_P(X\mathbf{1}_G) = E_P(Y\mathbf{1}_G) \qquad \forall G \in \mathcal{G}$$

(b) Todista Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmän kautta symmetria

$$E_P(X_k|\sigma(S_n))(\omega) = E_P(X_1|\sigma(S_n))(\omega) \qquad k = 1, \ldots, n.$$

R. Koska kun $1 \leq k \leq n$

$$E_P(f(X_1, S_n)) = E_P(f(X_1, X_1 + \ldots + X_n)) =$$
$$E_P(f(X_k, X_1 + \ldots + X_n)) = E_P(f(X_k, S_n))$$

kaikille rajoitetuille Borel mitallisille funktiolle $f(x, s)$, seuraa että P-todennäköisyysmitan suhteen satunnaismuuttujen parit (X_1, S_n) ja (X_k, S_n) ovat samoin jakautuneita, kun $1 \leq k \leq n$. Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa

$$E_P\Big(E_P(X_k|\sigma(S_n))g(S_n)\Big)E_P\Big(X_k g(S_n)\Big) = E_P\Big(X_1 g(S_n)\Big) =$$
$$E_P\Big(E_P(X_1|\sigma(S_n))g(S_n)\Big)$$

kaikille rajoitetuille Borel mitallisille funktioille g. Koska $E_P(X_k|\sigma(S_n))$ ja $E_P(X_k|\sigma(S_n))$ ovat $\sigma(S_n))$ mitallisita tästä seuraa

$$E_P(X_k|\sigma(S_n))(\omega) = E_P(X_1|\sigma(S_n))(\omega)$$

P melkein varmasti.

(c) Symmetrian avulla, laske $E(X_1|\sigma(S_n))$.
R. Koska P-melkein varmasti

$$S_n(\omega) = E_P(S_n|\sigma(S_n))(\omega) = E_P(X_1 + \ldots + X_n|\sigma(S_n))(\omega) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} E_P(X_k|\sigma(S_n))(\omega) = nE_P(X_1|\sigma(S_n))(\omega)$$

seuraa

$$E_P(X_1|\sigma(S_n))(\omega) = n^{-1}S_n(\omega)$$

P-melkein varmasti.