HY, Todennäköisyysteorian tentti, 9 maaliskuuta 2011

1. Olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla $E_P(|X|) < \infty$.

   Osoita:

$$E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > n)\big) \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty$$

2. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega), \ldots$ riippumattomien satunnaismuuttujien jono, (jotka **eivät** ole samoin jakautuneita), jolla

$$P\big(X_n = n^2 - 1\big) = \Big(1 - P\big(X_n = -1\big)\Big) = n^{-2} \; .$$

   Olkoon $S_n := (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

   - Osoita: P-melkein kaikille ω:lle

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = -1 \; ,$$

     mutta kaikille n:lle

$$E_P\big(\frac{S_n}{n}\big) = 0.$$

     Vihje: laske ensin

$$P\big(\omega : X_n(\omega) \neq -1 \text{ äärettömän monelle } n\text{:lle } \big)$$

     Vihje Muista Borel Cantellin lemmat !

3. Olkoon $X(\omega)$ 1-eksponentiaalinen satunnaismuuttuja, jolla $P(X > t) = \exp(-t)$ kun $t \geq 0$.

   - Olkoon $r > 0$ vakio. Osoita että eksponentiaalisella jakaumalla ei ole muistia, eli kaikille mitallisille $f(x) \geq 0$

$$E_P(f(X)|X > r) = E_P(f(X + r))$$

   - Laske elementaariset ehdolliset odotusarvot

$$E_P(X|\{X > r\}), \quad E_P(X|\{X \leq r\}),$$

   - Olkoon $I(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) > r)$ Laske ehdollinen odotusarvo σ-algebran $\sigma(I)$:n ehdolla

$$E_P(X|\sigma(I))(\omega)$$

   - Laske

$$E_P(\min(r, X))$$

4. Olkoon satunnaismuuttujat $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja 1-eksponentiaalisia, eli $P(X_n > t) = \exp(-t)$ kun $t \geq 0$.

   Olkoon

$$Z_n(\omega) := n \times \min\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \geq 0$$

   - Osoita: Z_n on 1-eksponentiaalinen, eli $P(Z_n > t) = \exp(-t)$ kun $t \geq 0$.
   - Laske ehdollinen odotusarvo

$$E_P\big(Z_n \big| \sigma(X_1, \dots, X_{n-1})\big)(\omega) = E_P(Z_n | \sigma(Z_{n-1}))(\omega)$$

     Vihje:

$$Z_n(\omega) = n \times \min\Big\{X_n(\omega), (n-1)^{-1} Z_{n-1}(\omega)\Big\}$$

     käytä satunnaismuuttujien X_n ja Z_{n-1} välistä riippumattomuutta.
   - Huomataan että $E_P(Z_n) = 1$.
     Kiinnitetään n ja määritellään todennäköisyysmitta Q_n todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ seuraavasti:

$$Q_n(A) = E_P(Z_n \mathbf{1}_A) \quad A \in \mathcal{F}_n$$

     Laske satunnaisvektorin $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ tiheysfunktio Q_n mitan suhteen, eli mitallinen funktio $f(x_1, \dots, x_n)$ jolla kaikille testifunktioille $g(x_1, \dots, x_n)$

$$E_{Q_n}(g(X_1, \dots, X_n)) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) du_1 \dots du_n$$

   - Ovatko satunnaismuuttujat $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ riippumattomia myös todennäköisyysmitan Q_n suhteen ?

5. Olkoon X_1 satunnaismuuttujja jolla $P(X_1 > x) = \exp(-x)$, kun $x \geq 0$ Huomataan että $E_P(X_1) = 1$, $E_P(X_1^2) = 2$.

   - Laske karakteristinen funktio $\varphi_X(t) := E_P(\exp(tX_1\sqrt{-1}))$.
   - Laske kumulantti generoiva funktio $\Lambda(t) = \log E_P(\exp(tX_1))$. Milloin $\Lambda(t) < +\infty$?
   - Laske sen Legendre muunnos.

$$\Lambda^*(x) = \sup_t \big\{xt - \Lambda(t)\big\}$$

   - Olkoon $x > 1 = E_P(X)$. Laske mitan exponentiaalinen mitan vaihto parametri t^* jolla $E_{P^*}(X_1) = x$, kun valitaan

$$P^*(X_1 \in B) := E_P\big(\exp(t^* X_1 - \Lambda(t^*))\mathbf{1}_A\big).$$

- Olkoon

$$\widehat{S}_n(\omega) := \frac{1}{\sqrt{n}}(S_n(\omega) - n)$$

josta on vähennetty odotusarvo ja sitten skalattu siten että $E_P(\widehat{S}_n) = 0$ ja $E_P(\widehat{S}_n^2) = 1$. Laske karateristinen funktio

$$\varphi_{\widehat{S}_n}(t) := E_P(\exp(itn^{-1/2}(S_n - n))$$

- Laske $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\widehat{S}_n}(t)$.
Vihje : Voit laskea suoraan, tai epäsuoraasti kun muistat keskeisen raja-arvon lauseetta. Muistetaan myös että kun G on gaussinen jolla $E(G) = 0, E(G^2) = 1$,

$$\varphi_G(t) := E_P(\exp(itG)) = \exp\big(-\frac{t^2}{2}\big)$$

Jos ajot laskea suoraan karakteristisen funktion raja-arvo, kirjoita $\log(\varphi_{\widehat{S}_n}(t))$ ja käytä logaritmin Taylorin kehitelmää.

- Osoita: $\widehat{S}_n$ suppenee jakauman mielessä kohti gaussista jakaumaa.