Stokastiikka I, tentti 3.11.2010
Torstaina 4.11 stokastiikan luennot jatkuvat normaalisti, iltäpäivällä demotunneilla käsitellään tenttitehtävien ratkaisut.

1. Olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla $E_P(|X|) < \infty$.

   Osoita:
$$E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > n)\big) \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty$$

2. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ riippumattomien satunnaismuuttujien jono, (jotka **eivät** ole samoin jakautuneita), jolla
$$P\big(X_n = n^2 - 1\big) = \Big(1 - P\big(X_n = -1\big)\Big) = n^{-2} .$$
   Olkoon $S_n := (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

   - Osoita: P-melkein kaikille ω:lle
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = -1 ,$$
     mutta kaikille n:lle
$$E_P\big(\frac{S_n}{n}\big) = 0.$$
     Vihje: laske ensin
$$P\big(\omega : X_n(\omega) \neq -1 \text{ äärettömän monelle } n\text{:lle } \big)$$
     Vihje Muista Borel Cantellin lemmat !
   - Onko jono $\Big\{n^{-1}S_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\Big\}$ tasaisesti integroituva ?

3. Olkoon $X(\omega)$ 1-eksponentiaalinen satunnaismuuttuja, jolla $P(X > t) = \exp(-t)$ kun $t \geq 0$.

   - Olkoon $r > 0$ vakio. Osoita että eksponentiaalisella jakaumalla ei ole muistia, eli kaikille mitallisille $f(x) \geq 0$
$$E_P(f(X)|X > r) = E_P(f(X + r))$$
   - Laske elementaariset ehdolliset odotusarvot
$$E_P(X|\{X > r\}), \quad E_P(X|\{X \leq r\}),$$
   - Olkoon $I(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) > r)$ Laske ehdollinen odotusarvo σ-algebran $\sigma(I)$:n ehdolla
$$E_P(X|\sigma(I))(\omega)$$
   - Laske
$$E_P(\min(r, X))$$

4. Olkoon satunnaismuuttujat $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja 1-eksponentiaalisia, eli $P(X_n > t) = \exp(-t)$ kun $t \geq 0$.

Olkoon

$$Z_n(\omega) := n \times \min\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \geq 0$$

- Osoita: Z_n on 1-eksponentiaalinen, eli $P(Z_n > t) = \exp(-t)$ kun $t \geq 0$.
- Laske ehdollinen odotusarvo

  $$E_P\big(Z_n \big| \sigma(X_1, \dots, X_{n-1})\big)(\omega) = E_P(Z_n|\sigma(Z_{n-1}))(\omega)$$

  Vihje:

  $$Z_n(\omega) = n \times \min\Big\{ X_n(\omega), (n-1)^{-1} Z_{n-1}(\omega) \Big\}$$

  käytä satunnaismuuttujien X_n ja Z_{n-1} välistä riippumattomuutta.
- Onko (Z_n) martingaali filtraatiossa $(\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N})$ jossa $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$?

  Onko (Z_n) alimartingaali tai ylimartingaali ?
- Huomataan että $E_P(Z_n) = 1$.

  Kiinnitetään n ja määritellään todennäköisyysmitta Q_n todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ seuraavasti:

  $$Q_n(A) = E_P(Z_n \mathbf{1}_A) \quad A \in \mathcal{F}_n$$

  Laske satunnaisvektorin $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ tiheysfunktio Q_n mitan suhteen, eli mitallinen funktio $f(x_1, \dots, x_n)$ jolla kaikille testifunktioille $g(x_1, \dots, x_n)$

  $$E_{Q_n}(g(X_1, \dots, X_n)) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) du_1 \dots du_n$$
- Ovatko satunnaismuuttujat $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ riippumattomia myös todennäköisyysmitan Q_n suhteen ?