Todennäköisyysteorian koe (18.11.09)

Tehtävä 1

Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
olkoon $X(\omega), \widetilde{X}(\omega)$ ja $X_n(\omega), n \in \mathbb{N}$ satunnaismuuttujat.

Osoita:
jos $X_n(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti kun $n \uparrow \infty$
ja $X_n(\omega) \stackrel{L^1(P)}{\to} \widetilde{X}(\omega)$, (siis $E_P(|X_n - X|) \to 0$ kun $n \uparrow \infty$)
seuraa $\widetilde{X}(\omega) = X(\omega)$ $\quad P$-melkein varmasti.

Vihje Sekä $L^1(P)$ konvergenssista että P-melkein varma konvergenssista seuraa stokastinen konvergenssi. Kaytä stokastisen konvergenssin määritelmä.

Tehtävä 2 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
olkoon satunnaismuuttujat $\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita jossa $X_1(\omega)$ on standardi gaussinen $(E_P(X_1) = 0, E_P(X^2) = 1)$.

Olkoon $N(\omega)$ riippumaton ja Poisson(λ) jakautunut satunnaismuuttuja, siis $\lambda > 0$ ja $P(N = k) = \exp(-\lambda)\lambda^k/(k!)$, $k \in \mathbb{N}$, ja

$$Y(\omega) := \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)\mathbf{1}(k \leq N(\omega))$$

Laske momentti-generoiva funktio

$$m_Y(\theta) := E_P(\exp(\theta Y)) = E_P\left(\exp\left(\theta \sum_{k=1}^{N} X_k\right)\right)$$

Vihje: Fubinin lauseella tai ehdollistamalla. Käytä riippumattomuutta.

Tehtävä 3 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
olkoon $\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita jossa

$$P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p \in (0, 1) .$$

Olkoon $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega) \quad n \in \mathbb{N}.$

1. Osoita heikko suurten lukujen laki : $\forall \varepsilon > 0$

$$P\Big(|n^{-1}S_n - p| > \varepsilon\Big) \to 0 \text{ kun } n \to \infty$$

2. Olkoon $p < a < 1$. Osoita suurten poikkeamien yläraja:

$$P\Big(S_n > an\Big) \le \left(\frac{p}{a}\right)^{na}\left(\frac{1-p}{1-a}\right)^{n(1-a)} = \exp\Big\{-n\Big(a\log\Big(\frac{a}{p}\Big) + (1-a)\log\Big(\frac{1-a}{1-p}\Big)\Big)\Big\}$$
$$= \exp\Big\{-nK(P_a|P_p)\Big\}$$

jossa (tiedoksi vaan, tätä tietoa ei tarvitse käyttää)

$$K(P_a|P_p) := \sum_{\omega=0,1} P_a(\{\omega\})\log\Big(\frac{P_a(\{\omega\})}{P_p(\{\omega\})}\Big) \quad \text{on } P_p\text{:n suhteellinen entropia } P_a\text{:n suhteen.}$$

Vihje: kun $\theta > 0$

$$P(S_n > an) = P\Big(\exp(\theta S_n) > \exp(\theta an)\Big)$$

Käytetään ensi Chebychevin epäyhtälöä ja sitten optimoidaan θ:n suhteen.

Tehtävä 4

Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$, satunnaismuuttuja $X_n(\omega)$ on binomijakautunut parametreilla $n, p_n \in (0,1)$ eli

$$\begin{aligned} P_n\Big(X_n = k\Big) &= \binom{n}{k} p_n^k\,(1-p_n)^{n-k} \quad \text{kun } k = 0,1,\ldots,n \\ &= 0 \quad \textit{muuten} \end{aligned}$$

Oletamme että

$$\lim_{n\uparrow\infty} n\,p_n = \lambda \in (0,\infty)\ .$$

Osoita että jono (X_n) suppenee jakauman mielessä kohti X joka on Poisson jakautunut parametrilla λ:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{kun } k \in \mathbb{N} \\ &= 0 \quad \text{muuten} \end{aligned}$$