HY Todennäköisyysteoria II, kevät 2015, laskuharjoitukset 3 (1.04.2015)

1. Osoita että $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P)$ varustettuna olennaisen supremum normilla on täydellinen.

$$\| X \|_\infty = P\text{-esssup}_\omega \big\{ |X(\omega)| \big\} = \inf\big\{ \ K \in \mathbb{R} : P(|X| > K) = 0 \big\}$$

   Vihje $(X_n \in \mathbb{N})$ on Cauchy jono $L^\infty(P)$:ssa jos ja vain jos $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$: $\forall n, m \geq N_\varepsilon$

$$|X_n(\omega) - X_m(\omega)| < \varepsilon, \quad P\text{-melkein varmasti}$$

2. Olkoon $H \subset L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ suljettu aliavaruus. Osoita että L^2-projektio Π_H on lineaarinen operaattori: kun $X, Z \in L^2(P),\ a, b \in \mathbb{R}$,

$$\Pi_H(aX + bZ) = a\Pi_H X + b\Pi_H Z,$$

3. Olkoon $X(\omega)$ Poisson(λ) jakautunut satunnaismuuttuja, $\lambda > 0$, ja $Y(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) > 0)$.

   a Laske satunnaismuuttujan X ”elementaarinen” ehdollinen odotusarvo ehdolla tapahtumia $A = \{\omega : Y(\omega) = 1\}$ ja $A^c = \{\omega : Y(\omega) = 0\}$

$$E_P(X|Y = 1), \quad E_P(X|Y = 0)\ .$$

4. Olkoon $G_1(\omega)$ ja $G_2(\omega)$ riippumattomia standardi Gaussisia satunnaismuuttujat jolla

$$P(G_1 \leq x, G_2 \leq y) = P(G_1 \leq x)P(G_2 \leq y) = \Phi(x)\Phi(y),$$
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\big(-\frac{y^2}{2}\big) dy$$

   Olkoon $M(\omega) = \max\big\{G_1(\omega), G_2(\omega)\big\}$.

   a) Laske $E_P(M|\sigma(G_1))(\omega)$.

   b) Laske $E_P(G_1|\sigma(M))(\omega)$.

   Vihje Katso tehtävän 5) vihjeet.

5. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega,\mathcal{F},P)$, olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla

   a) $P(X \in dx) = \mathbf{1}(x \geq 0) \exp(-x) dx$, X on 1-eksponentiaalinen

b) $P(X \in dx) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}dx$, X on Cauchy jakautunut.

Osoita:

tapauksessa **a)** $E_P(|X|) < \infty$,

ja tapauksessa **b)** $E_P(|X|) = \infty$.

6. Olkoon $Y(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor = \max\{ n \in \mathbb{Z} : n \leq X(\omega)\} \in \mathbb{Z}$.

   Laske tapauksissa **3**.**a**) ja **3**.**b**) ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\sigma(Y))(\omega) \in \mathbb{R}$$

   Vihje Huomaat että σ-algebra $\sigma(Y)$ on numeroituvasti generoitu, eli on olemassa numeroituva $\mathcal{F}$-mitallinen ositus joka virittää σ-algebraa.

7. Olkoon $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$ P riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0,1]$, siis

$$P(X \in dx, Y \in dy) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\ \mathbf{1}_{[0,1]}(y)\ dx\ dy$$

   Olkoon $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$ ja $I(\omega) = \mathbf{1}(X(\omega) \leq Y(\omega))$

   (a) Laske $P(X > Y)$.

   (b) Laske "elementaarinen" ehdollinen odotusarvon tapahtuman ehdolla

$$E_P(X|X > Y)$$

   (c) Laske ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\sigma(I))(\omega)$$

   (d) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(X|\sigma(Z), I)(\omega)$.
   Vihje Koska

$$Z(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) = Y(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega))$$

   voit osoitaa ensin (Kolmogorovin määritelmän kautta)

$$\begin{aligned}
&E_P(X|\sigma(Z), \sigma(I))(\omega)\ \mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \\
&= E_P(X|\sigma(Y), \sigma(I))(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \\
&= \frac{E_P(X\mathbf{1}(X > Y)|\sigma(Y))}{P(X > Y|\sigma(Y))(\omega)}\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega))
\end{aligned}$$

Muistetaan että silloin kun X ja Y ovat P-riippumattomia,

$$E_P(f(X,Y)|\sigma(Y))(\omega) = E_P(f(X,y))\Big|_{y=Y(\omega)}$$

Vihje Laske ensin $E_P(X|\sigma(Z,I))$, jossa $I(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) \le Y(\omega))$ ja tietenkin$\sigma(Z,I) \supseteq \sigma(Z)$.

$$E_P(Z|\sigma(Z)) = E_P\big(E_P(X|\sigma(Z,I))\big|\sigma(Z)\big)$$

8. Osoita Fatou lemma ehdollisille odotusarvolle: jos $0 \le X_n(\omega)$,

$$0 \le E_P(\liminf X_n|\mathcal{G})(\omega) = \liminf_n E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega)$$