

**HY Todennäköisyysteoria II, kevät 2015, laskuharjoitukset 2
(25.03.2015)**

Tehtävä optioista ja odotusarvon derivoinnista parametrin suhteen
Matemaattisessa rahoitusteoriassa on tapana mallittaa osakkeen arvo $S(\omega)$ hetkellä $t > 0$ log-normalisella jakaumalla, siis

$$S_t(\omega) = S_0 \exp\left(\sigma\sqrt{t}G(\omega) - \frac{1}{2}\sigma^2t\right)$$

jossa $S_0 > 0$ on osakkeen arvo hetkellä 0 ja $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, eli P :n suhteen satunnaismuuttuja $G(\omega)$ on standardi gaussinen jolla

$$P(G \leq x) = \int_{-\infty}^x \gamma(y)dy, \quad \gamma(y) = \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

Eurooppalainen optio on satunnaismuuttuja $H(\omega) = h(S_t(\omega))$, jossa $x \mapsto h(x)$ on mitallinen.

Option hinta hetkellä 0 on odotusarvo $c(t, S_0, \theta) := E_P(h(S_t))$ tietyn riskineutraali todennäköisyysmitan P suhteen.

1. Oleta ensin että $x \mapsto h(x)$ on derivoituva ja osoita että $c(t, S_0, \sigma)$ on derivoituva parametrien t, S_0 ja σ :n suhteen, ja voidaan vaihtaa derivoinnin ja integroinnin järjestystä joillakin tasaisen integroivuuden oletuksilla.
2. Osoita että $c(t, S_0, \sigma)$ on derivoituva parametrien t, S_0 ja σ :n suhteen, myös silloin $h(x)$ ei olisi derivoituva, joillakin tasaisen integroivuuden oletuksilla.

Vihjeet

$$\begin{aligned} c(t, S_0, \sigma) &= \int_{\mathbb{R}} h\left(\exp\left(\log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2t + \sigma\sqrt{t}y\right)\right)\gamma(y)dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} h(\exp(x)) \gamma\left(\frac{x - \log S_0 + \frac{1}{2}\sigma^2t}{\sigma\sqrt{t}}\right)dx \end{aligned}$$

muuttujan vaihdolla

$$\begin{aligned} x &= \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2t + \sigma\sqrt{t}y \\ y &= \frac{x - \log S_0 + \frac{1}{2}\sigma^2t}{\sigma\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Muista myös että standardi-Gaussisen jakauman tiheysfunktiolle pätee $\frac{d}{dx}\gamma(x) = -x\gamma(x)$.

3. Laske option hinta $c(t, S_0, \sigma)$ ja herkyysparametrit

$$\frac{\partial c(t, S_0, \sigma)}{\partial t}, \frac{\partial c(t, S_0, \sigma)}{\partial S_0}, \frac{\partial c(t, S_0, \sigma)}{\partial \sigma},$$

silloin kun

(a)

$$h(S_1) = (S_1 - K)^+$$

on eurooppalainen ostioptio (call) lunastushinnalla (strike price) $K > 0$,

(b)

$$h(S_1) = (K - S_1)^+ = (S_1 - K)^- = K - S_1 - (S_1 - K)^+$$

on eurooppalainen myyntioptio (put) lunastushinnalla $K > 0$.

$(S_t(\omega) - K)^+$ kutsutaan eurooppalaiseksi osto-optioksi joka antaa oikeus mutta ei velvollisuutta ostaa yhden osakkeen maturiteetti hetkellä t ennalta sovitulla hinnalla K . Jos markkinahinta $S(\omega)$ on maturiteetin hetkellä korkeampi kun K , option haltija lunastaa optionsa, ostaa osakkeen hinnalla K ja kun myy heti sen pois saa voittoa $(S_t(\omega) - K)^+$. Jos $S \leq K$, osto-optio on silloin arvoton,

Vastaavasti $(S_t(\omega) - K)^-$ kutsutaan eurooppalainen myyntioptioksi. Tämän option haltijalla on oikeus (mutta ei velvollisuus) myydä maturiteettin hetkellä t yhden osakkeen ennalta sovitulla hinnalla K .

Osto-myynti pariteetti eurooppalaisten osto- ja myynti-optioiden välissä on yhtälö

$$S_1 - K = (S_1 - K)^+ - (K - S_1)^+$$

Koska vasemman puoleen option hinta hetkellä $t = 0$ on

$$S_0 - \frac{K}{1+r},$$

jossa $r > -1$ on riskittömän sijoituksen korko, eurooppalaisten optioiden hinnoille hetkellä $t = 0$ pätee

$$S_0 - \frac{K}{(1+r)} = c((S_1 - K)^+) - c((K - S_1)^+)$$

Tässä oletetaan että $r = 0$.