HY Todennäköisyysteoria II, kevät 2015, laskuharjoitukset 6 (29.04.2015)

Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia kertymäfunktiolla $F(t) = P(X_1 \le t)$.

Jonon empiirinen kertymafunktio on

$$\widehat{F}_n(t,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(X_i(\omega) \le t), \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Laske odotusarvo $E(\widehat{F}_n(t))$.

2. Osoita: $\forall t$,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{F}_n(t,\omega) = F(t)$$

   P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä.

3. Osoita: jos $-\infty = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} = +\infty$, $\forall \omega$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\widehat{F}_n(t,\omega) - F(t)| \le \sup_{1\le j\le k} |\widehat{F}_n(t_j,\omega) - F(t_j)| + \sup_{0\le j\le k} |F(t_{j+1}) - F(t_j)|$$

4. Osoita: jos $t \mapsto F(t)$ on jatkuva

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\widehat{F}_n(t,\omega) - F(t)| = 0$$

   P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä.

5. Olkoon $(U_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja

$$\widehat{G}_n(t,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(U_n(\omega) \le t)$$

   niiden empiirinen kertymäfunktio, ja olkoon F kertymäfunktion yleistetty käänteisfunktio

$$X^+(u) := \inf\{t : F(t) > u\}, \quad u \in [0,1]$$

   F: kertymäfunktion yleistetty käänteisfunktio.

6. Olkoon $X_n(\omega) = X^+(U_n(\omega))$. Skorokohodin esityksestä seuraa että $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ ovat P-riippumattomia ja samoin jakautuneita kertyämfunktiolla $P(X_n \le t) = F(t)$.

7. Osoita: empiirisille kertymäfunktiolle pätee

$$\widehat{F}_n(t,\omega) = X^+(\widehat{G}_n(t\omega))$$

8. Osoita Glivenko-Cantellin lause:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\widehat{F}_n(t,\omega) - F(t)| = 0$$

P-melkein varmasti myös silloin kun $F(t)$ on epäjatkuva.

9. Laske kovarianssi

$$\mathrm{Cov}\big(\widehat{F}_m(t), \widehat{F}_n(s)\big) = E\Bigg(\widehat{F}_m(t)\widehat{F}_n(s)\Bigg) - E\big(\widehat{F}_m(t)\big)E\big(\widehat{F}_n(s)\big)$$

10. Osoita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\big(\widehat{F}_n(t) - F(t)\big) \stackrel{d}{=} X(t) \sim \mathcal{N}\big(0, F(t)(1-F(t))\big)$$

jakauman mielessä.

11. Osoita: kun $s, t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\big(\widehat{F}_n(t) - F(t), \widehat{F}_n(s) - F(s)\big)$$
$$\stackrel{d}{=} (X(t), X(s)) \sim \mathcal{N}\left((0,0), \begin{pmatrix} F(t)(1-F(t)) & F(t\wedge s) - F(t)F(s) \\ F(t\wedge s) - F(t)F(s) & F(s)(1-F(s)) \end{pmatrix}\right)$$

jakauman mielessä.

12. Olkoon $U_n(\omega)$ P-riippumattomia tasaisesti jakautuneita välissä $[0,1]$, jolla $P(U_n \le t) = t$, $0 \le t \le 1$, ja $S_n(\omega) = U_1(\omega) + \cdots + U_n(\omega)$. Laske karakteriset funktiot

$$\phi_{U_1}(\theta) = E_P\big(\exp(i\theta U_1)\big), \quad \phi_{S_n}(\theta) = E_P\big(\exp(i\theta S_n)\big),$$