HY Todennäköisyysteoria II, kevät 2015, laskuharjoitukset 5 (22.04.2015)

1. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus varustettu filtraatiolla $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N}\}$.

   Satunnaismuuttuja $\tau(\omega) \in \mathbb{N}$ on pysähdyshetki jos ja vain jos

   $$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

   Osoita että jos $\sigma(\omega)$ on myös pysähdyshetki, silloin $(\sigma \wedge \tau)$ ja $(\sigma \vee \tau)$ (minimi) ja maksimi ovat pyhsähdyshetkiä.

   Osoita että $\forall t \in \mathbb{N}$, $\tau(\omega)\mathbf{1}(\tau(\omega))$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen.

2. Olkoon $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{F}$-sopiva prosessi, eli $\forall t$ $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen, jolla $X_0 = 0$. Olkoon

   $$\tau_x(\omega) = \begin{cases} \inf\{\ s : M_s \geq x\} & \text{for } x \geq 0 \\ \inf\{\ s : M_s \leq x\} & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

   Osoita että $\forall x \in \mathbb{R}$ $\tau_x(\omega)$ on pysähdyshetki.

3. Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ riippumattomien satunnaismuuttujen jono jolla $X_t(\omega) \geq 0$ P-m.v. ja $E(X_t) = \mu \in [0, +\infty)$, ja olkoon $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_t)$

   Osoita: tuloprosessi $M_t = (X_1 X_2 \ldots X_t)$ on $\mathbb{F}$-alimartingaali kun $\mu > 1$, ja $\mathbb{F}$-ylimartingaali kun $\mu < 1$, ja $\mathbb{F}$-martingaali kun $\mu = 1$.

4. Olkoon $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ $t \in \mathbb{N}$, diskreetti aikainen Markovin ketju alkujakaumalla $\pi(dx)$ ja siirtymäytimellä $K(x, dy) = P(X_t \in dy |\ X_{t-1} = x)$.

   Olkoon $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_t)$.

   Määritellään operaattori

   $$(Kf)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)K(y, dx) = E_x(f(X_1)) = E_P(f(X_t)|X_{t-1} = x)$$

   Osoita että

   $$M_t(f) = \sum_{s=1}^{t} (f(X_s) - (Kf)(X_{s-1}))$$

   on $\mathbb{F}$-martingaali kun $f(x)$ on rajoitettu ja Borel mitallinen.