HY Todennäköisyysteoria II, kevät 2015, laskuharjoitukset 4 (15.04.2015)

1. Olkoon $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra

   Merkitään

   $$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}_P(X,Y) = E_P(XY) - E_P(X)E_P(Y) \quad (\text{ kovarianssi }) \\ &\mathrm{Cov}_P(X,Y|\mathcal{G})(\omega) = E_P(XY|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X|\mathcal{G})(\omega)E_P(Y|\mathcal{G})(\omega) \\ &(\text{ ehdollinen kovarianssi ehdolla } \mathcal{G}\ \sigma\text{-algebra }).\end{aligned}$$

   Verifioi kaava

   $$\mathrm{Cov}_P(X,Y) = E_P\Big(\ \mathrm{Cov}(X,Y|\mathcal{G})\Big) + \mathrm{Cov}_P\Big(E_P(X|\mathcal{G}), E_P(Y|\mathcal{G})\Big)$$

2. Olkoon satunnaismuuttujat $X(\omega), Y(\omega), Z(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Olkoon

   $$H = \Big\{\ a(Y) + b(Y)Z : a, b \text{ Borel mitalliset funktiot}\Big\} \cap L_2(\Omega, \sigma(Y,Z), P)$$

   eli H koostuu neliö-integroituvista ja $\sigma(Z,Y)$ mitallisista satunnaismuuttujsta jotka riippuvat lineaarisesti $Z(\omega)$:sta.

   - Osoita että

     $$\hat{X}(\omega) = E_P(X|\sigma(Y)) + \Big(Z(\omega) - E_P(Z|\sigma(Y))(\omega)\Big)\frac{\mathrm{Cov}_P(XZ|\ \sigma(Y))(\omega)}{\mathrm{Var}_P(Z^2|\ \sigma(Y))(\omega)}$$

     on X:n ortogonaalinen projektio aliavaruuteen H.
   - Laske ehdollinen neliövirhe $E_P((\hat{X} - X)^2|\sigma(Z,Y))(\omega)$.
   - Laske ehdollinen neliövirhe $E_P((\hat{X} - X)^2|\sigma(Y))(\omega)$.
   - Laske neliövirhe $E_P((\hat{X} - X)^2)$.
     Vihje Käytä projektion määritelmä.
   - Olkoon $Y(\omega) = E_P(X|\sigma(Z,Y))(\omega)$. Osoita

     $$\begin{aligned}&E_P((Y - X)^2|\sigma(Y,Z))(\omega) \le E_P((\hat{X} - X)^2|\sigma(Y,Z))(\omega) \\ &E_P((Y - X)^2|\sigma(Y))(\omega) \le E_P((\hat{X} - X)^2|\sigma(Y))(\omega) \\ &E_P((Y - X)^2) \le E_P((\hat{X} - X)^2)\end{aligned}$$

3. Olkoon $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$ Gaussinen satunnaisvektori jonka komponentit $\xi_k(\omega) \in \mathbb{R}$ P-riippumattomia ja samoin jakautuneita standardi-Gaussisia satunnaismuuttujat, joilla $E_P(\xi_k) = 0$ ja $E_P(\xi_k^2) = 1$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$, vakio vektori, ja $A = (A_{ij} : 0 \leq i \leq j \leq d)$ vakio $d \times d$ matriisi.

   Olkoon $X(\omega) = (\mu + A\xi(\omega)^\top) \in \mathbb{R}^d$.

   Silloin $E_P(X) = \mu \in \mathbb{R}^d$ ja $E_P(X_i X_j) - E_P(X_i)E_P(X_j) = \Sigma_{ij}$, jossa $\Sigma = AA^\top$. Satunnaisvektorilla X on tiheysfunktio $\mathbb{R}^d$-Lebesgue mitan suhteen

$$p_X(x) = (2\pi)^{-d/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\bigl(-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)^\top\bigr),$$

   joka seuraa muuttujan vaihdolla $x = \mu + Ay^\top$ (esimerkki 7.0.2 luentomonisteessa). Eli jos $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on mitallinen rajoitettu testifunktio

$$E_P\Bigl(g(X)\Bigr) = E_P\bigl(g(\mu + A\xi^\top)\bigr) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} g\bigl(\mu_1 + \sum_{j=1}^d A_{1j}y_j, \dots, \mu_d + \sum_{j=1}^d A_{1j}y_j\bigr) \prod_{j=1}^d \Bigl\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y_j^2/2) \Bigr\} dy_1 \dots dy_d =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, \dots, x_d) p_X(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d \qquad .$$

   Olkoon $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ yhteisesti Gaussisia satunnaisvektoreita, jolla $X(\omega) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ja $Y(\omega) \in R^{n_y}$ kovarianssimatriisilla

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy}^\top & \Sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

   Oletamme $E_P(X) = E_P(Y) = 0$ muuten voimme aina siirtyä käsittelemään satunnaisvektoreita $X' = (X - E(X))$ ja $Y' = (Y - E(Y))$.

   Laske Bayesin' kaavalla tiheysfunktiot ehdollisilla jakaumille

$$p_{X|\ Y}(x|Y = y) \quad \text{ja} \quad p_{Y|X}(y|\ X = x)$$

   Vihje Neliömatriiseilla pätee inversiokaava

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

   jossa blokit A ja D ovat myös neliömatriiseja (tarkista !).