

**HY Todennäköisyysteoria II , kevät 2015, laskuharjoitukset 1
(18.3.2015)**

1. Todennäköisyysavaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) ,

Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujaa, jolla

$$P(X_1 > t_1, \dots, X_n > t_n) = \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n t_i\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \geq 0,$$

jossa $\lambda > 0$ on parametri.

(a) Osoita että $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ ovat P -riippumattomia

R Koska eksponentiaali faktorisoituu, $\forall n, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

$$P(X_1 > t_1, \dots, X_n > t_n) = \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda t_i) = \prod_{i=1}^n P(X_i > t_i)$$

siis (lyhyesti) tapahtumat $(\{\omega : X_n(\omega) > t_n\} : n \in 1, \dots, n)$ ovat P -riippumattomia.

Koska avoimien välien kokoelma $\{(t_1, \infty) \times \dots \times (t_n, \infty), t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}\}$ on π -luokka joka virittää Borelin tulo σ -algebran $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, Dyninkin laajennus lauseesta seuraa että kun $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, \dots, n$,

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \times P(X_n \in B_n)$$

siksi satunnaismuuttujien virittämien σ -algebrat $\sigma(X_i), i \in \mathbb{N}$ ovat P -riippumattomia eli satunnaismuuttujat ovat P -riippumattomia.

(b) Olkoon

$$Y_n = \min\{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\}.$$

Laske $P(Y_n > t)$. Laske myös satunnaismuuttujan Y_n tiheysfunktio.

R P -riippumattomuuden nojalla, kun $t \geq 0$.

$$P(Y_n > t) = P(X_1 > t, \dots, X_n > t) = \prod_{i=1}^n P(X_i > t) = P(X_1 > t)^n = \exp(-\lambda t)^n = \exp(-n\lambda t)$$

Tiheysfunktio saadaan kertymäfunktion derivoimalla:

$$\begin{aligned} p_{Y_n}(t) &= \frac{d}{dt}P(Y_n \leq t) = \frac{d}{dt}P(Y_n \leq t) = \frac{d}{dt}\{1 - P(Y_n > t)\} \\ &= -\frac{d}{dt}\{P(Y_n > t)\} = n\lambda \exp(-n\lambda t) \end{aligned}$$

siis Y_n on myös eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla $n\lambda$.

(c) Olkoon $X_n^*(\omega) = \max\{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$

Laske $P(X_n^* \leq t)$. Laske X_n^* myös satunnaismuuttujan tiheysfunktio.

R P -riippumattomuuden nojalla, kun $t \geq 0$

$$\begin{aligned} P(X_n^* \leq t) &= P(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq t) = P(X_1 \leq t)^n \\ &= (1 - \exp(-\lambda t))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \exp(-k\lambda t) \end{aligned}$$

(Newtonin binomi kaava). Tiheysfunktio on

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(X_n^* \leq t) &= n(1 - \exp(-\lambda t))^{n-1} \exp(-\lambda t)\lambda \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} k \exp(-k\lambda t) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} (-1)^k \exp(-(k+1)\lambda t) \end{aligned}$$

(d) Laske $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\lambda X_n^* \leq t + \log(n))$.

Vihje: $(1 + x/n)^n \rightarrow \exp(x)$ kun $n \rightarrow \infty$.

R $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(\lambda X_n^* \leq t + \log n) &= P(X_n^* \leq (t + \log n)/\lambda) \\ &= \left(1 - \exp(t + \log n)\right)^n = \left(1 - \frac{\exp(-t)}{n}\right)^n \rightarrow \exp(-\exp(-t)) \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$

2. Osoita:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} < \infty, \text{ kun } s > 1.$$

$\zeta(s)$ kutsutaan Riemannin zeta funktioksi.

R Koska $x^{-s} \geq n^{-s}$ kun $x \in (n, n+1]$, koska $\frac{d}{dx}x^{1-s} = (1-s)x^{-s}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \leq \int_1^{\infty} x^{-s} dx = \frac{1}{1-s} (1^{-s} - \infty^{-s}) = \frac{1}{1-s} < \infty$$

Diskreettitodennäköisyysavaruudessa $(\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}, P)$, olkoon

$$P(\{n\}) := n^{-s} / \zeta(s).$$

Laske $P(E_m)$ jossa

$$E_m = m\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : m \text{ jakaa } n\}.$$

R

$$P(m\mathbb{N}) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} (mn)^{-s} = m^{-s} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s} = m^{-s} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = m^{-s}$$

(b) Osoita että tapahtumat E_p ja E_q ovat P -riippumattomia kun p ja q ovat alkulukuja :

R

$$P(p\mathbb{N} \cap q\mathbb{N})P(pq\mathbb{N}) = (pq)^{-s} = P(p\mathbb{N})P(q\mathbb{N})$$

(c) Osoita Eulerin kaava

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ alkuluku}} (1 - p^{-s}) \quad (0.1)$$

Vihje käytä riippumattomuutta. **R** Koska tapahtumat $(E_p : p \text{ on alkuluku})$ ovat P -riippumattomia, näin ovat niiden komplementit:

$$\prod_{p \text{ alkuluku}} (1 - p^{-s}) = \prod_{p \text{ alkuluku}} P(E_p^c) = P\left(\bigcap_{p \text{ alkuluku}} E_p^c\right) = P(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

koska 1 on aino luku joka ei ole jaettavissa alkuluvuilla.

(d) Osoita että ehdollisille todennäköisyydelle pätee kaikille $n, m \in \mathbb{N}$ (ei välttämättä alkulukuja)

$$P(nm\mathbb{N}|m\mathbb{N}) = P(n\mathbb{N}) \quad (0.2)$$

R Suoraan määritelmästä

$$P(nm\mathbb{N}|m\mathbb{N}) = \frac{\sum_{k \in \mathbb{N}} (nmk)^{-s}}{\zeta(s)} \frac{\zeta(s)}{\sum_{h \in \mathbb{N}} (mh)^{-s}} = \left(\frac{nm}{m}\right)^{-s} = n^{-s}$$

(e) Olkoon X satunnaismuuttuja jolla $P(X = n) = n^{-s}/\zeta(s)$. Osoita

$$P(\{ \text{ei ole olemassa } k > 1 \text{ jolla } k^2 \text{ jakaa } X \}) = 1/\zeta(2s)$$

R Koska

$$\bigcap_{k>1} (k^2\mathbb{N})^c = \bigcap_{q\text{alkuluku}} (q^2\mathbb{N})^c, \text{ siit\u00e4 seuraa}$$

$$\{ \text{ei ole olemassa } k > 1 \text{ jolla } k^2 \text{ jakaa } X \} =$$

$$\{ \text{ei ole olemassa alkuluku } q \text{ jolla } q^2 \text{ jakaa } X \} = \bigcap_{q\text{ alkuluku}} (q^2\mathbb{N})^c$$

ja tapahtumien $\{E_q : q \text{ on alkuluku}\}$ P -riippumattomuuden nojalla

$$\begin{aligned} &P(\{ \text{ei ole olemassa } k > 1 \text{ jolla } k^2 \text{ jakaa } X \}) \\ &= \prod_{q\text{ alkuluku}} (1 - P(q^2\mathbb{N})) = \prod_{q\text{ alkuluku}} (1 - q^{-2s}) = 1/\zeta(2s) \end{aligned}$$

jossa viimeinen yht\u00e4l\u00f6 seuraa Eulerin kaavasta (0.1).

(f) Olkoon X, Y P -riippumattomia jolla

$$P(X = n, Y = m) = P(X = n)P(Y = m) = (mn)^{-s}/\zeta(s)^2, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

ja olkoon $R(\omega)$ satunnaismuuttujien $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$:n suurin yhteinen jakaja. Osoita:

$$\mathbb{P}(\{R = n\}) = n^{-2s}/\zeta(2s)$$

R

$$P(\{R = n\}) =$$

$$P(X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N}, \text{ ei ole olemassa } q \text{ alkuluku jolla } X \in nq\mathbb{N} \text{ ja } Y \in nq\mathbb{N})$$

K\u00e4yt\u00e4mme ehdollista todenn\u00e4k\u00f6isyytt\u00e4:

$$\begin{aligned} &P(R = n) = \\ &P(X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N})P(R = n | X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N}) = \\ &P(X \in n\mathbb{N})P(Y \in n\mathbb{N})P(R = n | X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N}) \\ &= n^{-2s}P(R = n | X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N}) \end{aligned}$$

Nyt X/n ehdolla $X \in n\mathbb{N}$ ja Y/n ehdolla $Y \in n\mathbb{N}$ ovat P -riippumattomia ja (0.2) nojalla ovat samoin jakautuneita kuten alkuperäisiä X ja Y satunnaismuuttujia.

$$\begin{aligned}
& P(R = n \mid X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N}) = \\
& P(\{ \text{ei ole olemassa } k \in \mathbb{N} \text{ jolla } X \in nk\mathbb{N} \text{ ja } Y \in nk\mathbb{N} \mid X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N} \}) = \\
& P(\{ \text{ei ole olemassa } q \text{ alkuluku jolla } X \in nq\mathbb{N} \text{ ja } Y \in nq\mathbb{N} \} \mid X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N},) \\
& = P\left(\{ \text{ei ole olemassa } q \text{ alkuluku jolla } X \in q\mathbb{N} \text{ ja } Y \in q\mathbb{N} \}\right) \\
& = P\left(\bigcap_{q \text{ alkuluku}} (\{X \in q\mathbb{N}\} \cap \{Y \in q\mathbb{N}\})^c\right) \\
& = \prod_{q \text{ alkuluku}} P\left((\{X \in q\mathbb{N}\} \cap \{Y \in q\mathbb{N}\})^c\right) \\
& = \prod_{q \text{ alkuluku}} \left(1 - P(X \in q\mathbb{N})P(Y \in q\mathbb{N})\right) \\
& = \prod_{q \text{ alkuluku}} \left(1 - q^{-2s}\right) = 1/\zeta(2s)
\end{aligned}$$

3. (Box ja Mullerin Gaussisten satunnaismuuttujen generaattori). Olkoon satunnaismuuttujat $U(\omega)$ ja $V(\omega)$ P -riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0, 1]$.

Olkoon $R = \sqrt{-2 \log(1 - U(\omega))}$ ja $\Theta(\omega) = 2\pi V(\omega)$.

- (a) Osoita että $X(\omega) = R(\omega) \sin(\Theta(\omega))$ ja $Y(\omega) = R(\omega) \cos(\Theta(\omega))$ ovat P -riippumattomia standardi Gaussisia satunnaismuuttujat.

Vihje Laske satunnaisvektorin (X, Y) tiheysfunktio muuttujan vaihdolla.

- (b) Kirjoita ohjelmakoodia sinun suosituimmalla ohjelmointi kielellä (esim. R, matlab tai C) jossa generoidaan ensin riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0, 1]$, satunnaismuuttujia U, V , ja Box-Mullerin muunnoksen kautta saadaan riippumattomia standardi Gaussisia pareja.

4. (Heikko suurten lukujen laki) Olkoon $(X_n : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono jolla $E(X_n) = 0$ $E(X_n^2) = \sigma^2 < \infty$ ja $E(X_n X_m) = 0 \forall n, m \neq n$, eli satunnaismuuttujat ovat korreloimattomia.

Olkoon $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)$. Silloin

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$$

stokastisen konvergenssin mielessä kun $n \rightarrow \infty$.

Vihje: käytä Chebychevun epäyhtälö.

5. (Vahva suurten lukujen laki, 4-momenttin ehdolla). Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletamme $E_P(X_1^4) < \infty$ ja $E_P(X_1) = 0$.

Olkoon $S_n = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)$.

- (a) Laske $E_P(S_n^4)$. **Vihje:**

$$E_P(S_n^4) = E_P\left(\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\}^4\right) = E_P\left(\sum_{i,j,k,l=1}^n X_i X_j X_k X_l\right) = \sum_{i,j,k,l=1}^n E_P(X_i X_j X_k X_l) = \dots$$

R Todistetaan myöhemmin luennolla että $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \subseteq L^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kun $q \leq p$ ja P on todennäköisyysmitta (tai äärellinen mitta μ , kuitenkin tämä ei päde kun $\mu(\Omega) = \infty$).

Koska $E_P(X^4) < \infty$ myös $E_P(|X|^p) < \infty \quad \forall p \leq 4$. Huomataan että

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^n E_P(X_i X_j X_k X_l) &= \sum_{i,j=1}^n E_P(X_i^2 X_j^2) = \\ \sum_i E_P(X_i^4) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j<i} E_P(X_i^2 X_j^2) &= nE_P(X_1^4) + n(n-1)E_P(X_1^2)^2 \end{aligned}$$

koska kun jokin indeksi i on eri kuin muut, siis $i \notin \{j, k, l\}$ silloin P -riippumattomuuden nojalla

$$E_P(X_i X_j X_k X_l) = E_P(X_i) E_P(X_j X_k X_l) = 0.$$

- (b) Arvioi Chebychevin epäyhtälöllä todennäköisyydet

$$P(|S_n| > \varepsilon n)$$

R Käytämme $E_P(S_n^4)$ momenttia Chebychevin epäyhtälössä:

$$\begin{aligned} P(|S_n| > \varepsilon n) &= P(|S_n|^4 > \varepsilon^4 n^4) \leq \frac{E_P(S_n^4)}{n^4 \varepsilon^4} \\ &\leq \frac{nE_P(X_1^4) + n(n-1)E_P(X_1^2)^2}{\varepsilon^4 n^4} \leq Cn^{-2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$, jossa $C > 0$ on vakio, ja $S_n/n \xrightarrow{P} 0$ stokastisen konvergenssin mielessä

(c) Osoita Borel Cantelli lemmän avulla että P -melkein varmasti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$$

Vihje Osoita

$$P(\{ \omega : S_n(\omega) > n\varepsilon \text{ äärettömästi monille } n\text{:lle} \}) = 0$$

R. Koska

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| > \varepsilon n) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$$

ensimmäisen Borel Cantellin lemmasta seuraa $\forall K \in \mathbb{N}$

$$P\left(\limsup_n \left\{ \frac{|S_n|}{n} > \frac{1}{K} \right\}\right) = 0 \quad \forall K \in \mathbb{N}_+ \iff$$

$$P\left(\liminf_n \left\{ \frac{|S_n|}{n} \leq \frac{1}{K} \right\}\right) = 1 \quad \forall K \in \mathbb{N}_+ \iff$$

$$P\left(\bigcap_{K \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{ \frac{|S_n|}{n} \leq \frac{1}{K} \right\}\right) = 1 \iff$$

$$P\left(\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \right\}\right) = 1$$

Huomautus Tästä lauseesta on olemassa vielä yleisempi versio, jossa $E_P(|X_1|) < \infty$ on riittävä ehto.