HY Todennäköisyysteoria, kevät 2015, laskuharjoitukset 2 (4.2.2015)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, additiivinen todennäköisyys P on σ-additiivinen jos ja vain jos kaikille jonoille $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ jolla $A_n \downarrow \emptyset$, ali $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, seuraa $P(A_n) \downarrow 0$.

   Tämä ei päde äärettömälle mitalle, esimerkiksi Lebesguen mitalle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avaruudessa, joka on σ-äärellinen. Keksi vastaesimerkki.

2. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysavaruus ($\mathcal{F}$ on σ-algebra).

   Muistetaan ulkomitan määritelmä:

   Kuvaus $\lambda : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ on *ulkomitta* (engl. *outer measure*) jos

   (a) $\lambda(\emptyset) = 0$,

   (b) $A_1 \subseteq A_2 \quad, A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, \quad \Longrightarrow \quad \lambda(A_1) \leq \lambda(A_2)$

   (c) λ on ali-σ-additiivinen: kun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$,

   $$\lambda\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \lambda(A_n)$$

   Osoita: kun $\mathcal{Q}$ todennäköisyysmittojen kokoelma todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, seuraa että

   $$\lambda(A) := \sup_{Q\in\mathcal{Q}} Q(A), \qquad A \in \mathcal{F},$$

   on ulkomitta.

3. Olkoon μ_1, μ_2 σ-additiivisiä mittoja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$.

   (a) Mikä on pienin ulkomitta $\lambda : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ jolla $\lambda(A) \geq \mu_i(A)$, $\forall A \in \mathcal{F}, i \in 1, 2$?

   (b) Mikä on pienin σ-additiivinen mitta $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ jolla $\mu(A) \geq \mu_i(A)$, $\forall A \in \mathcal{F}, i \in 1, 2$?

4. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, määritellään mielivaltaisen joukon $G \subseteq \Omega$ ulkomitta

   $$P^*(G) = \inf_{\{F_n\}} \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$$

jossa infimum otetaan yli kaikkien numeroituvien mitallisten peitteiden $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ jolla $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Caratheodoryn laajennuslauseen todistuksessa osoitettiin että P^* on ulkomitta, siis on numeroituvasti sub-σ-addiitivinen, kasvava, ja $P^*(\emptyset) = 0$.

Määriteltiin myös σ-algebra $\mathcal{L}$ joka koostuu kaikista joukoista $A \subseteq \Omega$ jotka *jakaavat siististi* ulkomitan P^* seuraavalla tavalla

$$P^*(G) = P^*(G \cap A) + P^*(G \cap A^c) \quad \forall G \subseteq \Omega$$

$\mathcal{L}$ jäsenet kutsutaan myös P^*-mitallisiksi. Olemme myös osoittaneet että $P^* : \mathcal{L} \mapsto [0,1]$ on σ-additiivinen todennäköisyysmitta.

Määritellään nyt joukkoperheet

$$\mathcal{F}^P = \big\{ A \subseteq \Omega : \exists B', B'' \in \mathcal{F} \text{ with } B' \supseteq A \supseteq B'' \text{ and } P(B' \setminus B'') = 0 \big\},$$
$$\mathcal{N}^P = \big\{ A \subseteq \Omega : \exists B \in \mathcal{F} \text{ with } B \supseteq A \text{ and } P(B) = 0 \big\} \qquad (\ P\text{-nolla joukot}\ )$$

(a) Osoita että jokaiselle joukolle $G \subseteq \Omega$, on olemassa joukko $F \in \mathcal{F}$ jolla $F \supseteq G$ ja $P(F) = P^*(G)$.

(b) Osoita että jokaiselle joukolle $G \in \mathcal{L}$, on olemassa joukko $E \in \mathcal{F}$ jolla $E \subseteq G$ and $P(E) = P^*(G)$.
Vihje: soveltakaa tehtävän a) tulosta joukolle G^c ja käytä oletusta $G \in \mathcal{L}$.

(c) Osoita että $\mathcal{F}^P = \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$. Tämä on σ-algebran $\mathcal{F}$ P-täydennys P-nolla mittaisilla joukoilla.

(d) Osoita että $\mathcal{F}^P = \mathcal{L}$. Vihjeet: Osoittakseen että $\mathcal{N}^P \subseteq \mathcal{L}$, muista että ulkomitta P^* on kasvava ja subadditiivinen.
Osoittakseen että $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \supseteq \mathcal{L}$, käytä tehtäviä a),b).

5. Olkoon P todennäköisyysmitta avaruudessa $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ja $F(t) := P((-\infty, t])$, joka kutsutaan todennäköisyysmitan kertymäfunktioksi. Osoita:

   (a) F on kasvava

   (b) F on oikealta jatkuva. Vihje: Käytä todennäköisyyden σ-additiivisuutta.

   (c)

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1\ .$$

(d) Keksi esimerkki jossa F ei ole jatkuva.

Vihje: määritellään pistemassa $\delta_x(A) := \mathbf{1}(x \in A)$ jossa $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Osoita että $\delta_x(\cdot)$ on todennäköisyys. Mikä on sen kertymäfunktio?

6. Määritelmän mukaan avaruuden $\Omega = \mathbb{R}^d$ Borelin σ algebra on avomien joukkojen virittämä σ-algebra.

   Kun $t \in \mathbb{R}^d$, olkoon

$$(-\infty, t] = \{s \in \mathbb{R}^d : \ s_i \leq t_i, i = 1, \ldots d\}$$

   Osoita että luokka

$$\mathcal{I} = \big\{(-\infty, q], q \in \mathbb{Q}^d\big\}$$

   on π-luokka joka virittää Borelin σ-algebran.

   Vihje Jos U on avoin $\mathbb{R}^d$:ssa, ja Q on tiheä $\mathbb{R}$:ssa, $\forall x \in U \ \exists r, q \in \mathbb{Q}^d$ jolla $r < q$ (eli $r_i < q_i$ kun $i = 1, \ldots, d$

$$x \in (r, q) := (r_1, q_1) \times (r_2, q_2) \times \cdots \times (r_d, q_d) \subseteq U.$$

7. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{R}$-arvoisten satunnaismuuttujen jono todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$.

   Osoita että

$$\limsup_n X_n(\omega) := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} X_k(\omega), \quad \liminf_n X_n(\omega) := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} X_k(\omega),$$

   - ovat olemassa $\forall \omega \in \Omega$,
   - ovat ($\mathcal{F}$-mitallisia) satunnaismuuttujia.