Sijoitustoiminnan matematiikka 17.6.2015

1. Yhden periodin finanssimarkkinoilla on kaksi arvopaperia. Toinen on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i = 0$ ja toinen osake, jolla on kolme mahdollista arvoa hetkellä 1, nimittäin $1, 2$ ja 3. Osakkeen hinta hetkellä 0 on 2.

a) Määrää markkinoiden kaikki riskineutraalit todennäköisyysmitat sopivassa kolmitilaisessa todennäköisyyskentässä.

b) Lisätään markkinoille 'kaikki tai ei mitään' -optio, jonka haltija saa 3 euroa hetkellä 1, mikäli osakkeen arvo on tällöin 3 (ja muuten ei mitään). Määrää option arbitraasivapaat hetken 0 hinnat.

2. Finanssimarkkinoilla arvopapereiden hetken 1 arvoja kuvaa satunnaisvektori $S(1)$ ja markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1 on $A(1)$. Markkinoilla on toimijat $1, \ldots, K$. Sallittua allokointia $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ sanotaan Pareto-optimaaliseksi varianssin suhteen, ellei ole sellaista sallittua allokointia $(\theta^1, \ldots, \theta^K)$, että

$$\mathrm{Var}\,(S(1)\theta^k) \leq \mathrm{Var}\,(S(1)\bar{\theta}^k)$$

kaikilla $k = 1, \ldots, K$ siten, että erisuuruus on aito vähintään yhdellä toimijalla. Osoita, että sallittu allokointi $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on Pareto-optimaalinen edellä esitetyssä mielessä, jos $S(1)\bar{\theta}^k = h_k A(1)$, missä $h_1, \ldots, h_K$ ovat positiivisia vakioita ja $h_1 + \cdots + h_K = 1$.

3. Markkinoilla on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i = 0$ ja joukko riskillisiä arvopapereita. Riskillisten arvopapereiden odotustuotot eivät ole kaikki samoja ja tuottoasteiden kovarianssimatriisi on kääntyvä. Odotustuottoa $r \geq 1$ vastaava minimaalinen riskillisistä arvopapereista muodostetun salkun tuottoasteen varianssi on

$$\sigma^2(r) = r^2 - 2r + 2.$$

a) Toimija muodostaa bondeista ja riskillisistä arvopapereista CAP-mallin mukaisen optimaalisen salkun siten, että tuottoasteen varianssi on $1/2$. Määrää salkun odotustuotto.

b) Oletetaan, että riskillisiä arvopapereita on kolme kappaletta ja että markkinasalkku on $(0.5, 0.3, 0.2)$. Toimija sijoittaa markkinoille 1000 euroa a-kohdan mukaisesti. Määrää markkinoiden arvopereihin sijoitettavat rahamäärät.

4. Finanssimarkkinoilla on arvopaperit $1, \ldots, N$. Arvopaperin n arvo hetkellä k olkoon $S_n(k), n = 1, \ldots, N$, $k = 0, 1$, ja olkoon $S(k) = (S_1(k), \ldots, S_N(k))$, $k = 0, 1$. Vakuutusyhtiö suorittaa hetkellä 1 vakuutetulle määrän X, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Olkoon vakuutettu x-ikäinen hetkellä 0 ja olkoon τ vakuutetun jäljellä oleva elinaika ja

$${}_kp_y = \mathbb{P}(\tau > y + k \mid \tau > y), \quad y \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Oletetaan, että salkku $(\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_N)^T$ minimoi keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left([X - S(1)\theta]^2\right)$$

yli kaikkien salkkujen $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^T \in \mathbb{R}^N$ ja että τ on stokastisesti riippumaton vektorista $S(1)$. Etsittävä hetkellä 0 hankittava salkku θ, joka minimoi keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left([X\mathbf{1}(\tau > 1) - S(1)\theta]^2\right).$$

Sijoitustoiminnan matematiikka 17.6.-15

1. a) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $S_2(1,\omega_j) = j$, $j = 1,2,3$.

Q on riskineutraali, jos $Q(\omega_j) = q_j \in (0,1)$, $\forall j$ ja

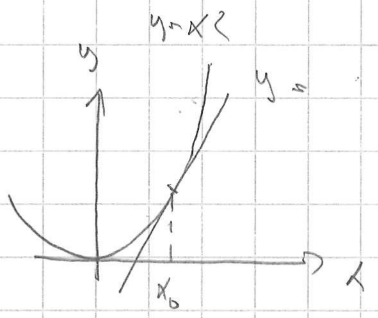
$$\mathbb{E}_Q(S_2(1)) = \begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1 + 2q_2 + 3q_3 = 2 \end{cases}$$

Jos $q_3 \in (0,1)$, on oltava $q_2 = 1 - 2q_3$, $q_1 = q_3$.
On siis oltava lisäksi $q_3 \in (0, \frac{1}{2})$.

RN-mitat: $Q(\omega_1) = q_3$, $Q(\omega_2) = 1 - 2q_3$, $Q(\omega_3) = q_3$, missä $q_3 \in (0, \frac{1}{2})$ mielivaltainen.

b) $$S_3(1) = \begin{cases} S_2(1), & \omega = \omega_3 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

$\mathbb{E}_Q(S_3(1)) = 3q_3$. AV-hinnat välillä $(0, \frac{3}{2})$



2. Konveksisuuden nojalla

$x^2 \ge x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$, $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}$.

Jos $(\Theta^1, \dots, \Theta^K)$ on sallittu, niin

$$\left(S(1)\Theta^k - \mathbb{E}(S(1)\Theta^k)\right)^2 \ge \left(S(1)\bar{\Theta}^k - \mathbb{E}(S(1)\bar{\Theta}^k)\right)^2 + 2\left(S(1)\bar{\Theta}^k - \mathbb{E}(S(1)\bar{\Theta}^k)\right) \cdot \left(S(1)\Theta^k - \mathbb{E}(S(1)\Theta^k) - S(1)\bar{\Theta}^k + \mathbb{E}(S(1)\bar{\Theta}^k)\right)$$

$$= \left(S(1)\bar{\Theta}^k - \mathbb{E}(S(1)\bar{\Theta}^k)\right)^2 + 2h_k\left(\Lambda(1) - \mathbb{E}(\Lambda(1))\right) \cdot \left(S(1)\Theta^k - \mathbb{E}(S(1)\Theta^k) - S(1)\bar{\Theta}^k + \mathbb{E}(S(1)\bar{\Theta}^k)\right)$$

Jaetaan h_k:illa ja summataan yli k:n:

$$\sum_k \left(S(1)\Theta^k - \mathbb{E}(S(1)\Theta^k)\right)^2 \cdot \frac{1}{h_k} \ge \sum_k \left(S(1)\bar{\Theta}^k - \mathbb{E}(S(1)\bar{\Theta}^k)\right)^2 \frac{1}{h_k}$$

clearing-ehdon nojalla. Väite seuraa ottamalla odotusarvot.

3. a) Arvopaperimarkkinasuoran yhtälö on

$$r = \sqrt{2}\,\sigma$$

(tentti 12.5.-15, teht. 3). Jos $\sigma^2 = \frac{1}{2}$, on siis $r = 1$. Lisäksi markkinasalkun odotusarvo r^* ja hajonta σ^* ovat $r^* = 2$, $\sigma^* = \sqrt{2}$.

b) Bondiin sijoitettava osuus w määräytyy ehdosta

$$w \cdot 0 + (1-w) r^* = 1 \quad \text{eli} \quad w = \tfrac{1}{2}.$$

Bondiin sijoitetaan 500 ja markkinasalkkuun

$$500 \cdot (0.5,\ 0.3,\ 0.2) = (250,\ 150,\ 100).$$

4. Jos $\mathcal{G}_0 = \sigma(S(1))$, niin

$$\mathbb{E}\left([X 1(\tau > 1) - S(1)\Theta]^2 \right)$$

$$= \mathbb{E}\left([X 1(\tau>1) - \mathbb{E}(X 1(\tau>1) \mid \mathcal{G}_0)]^2 \right) + \mathbb{E}\left([\mathbb{E}(X 1(\tau>1)\mid \mathcal{G}_0) - S(1)\Theta]^2 \right),$$

sillä

$$\mathbb{E}\Big((X 1(\tau>1) - \mathbb{E}(X 1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0))(\mathbb{E}(X 1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0) - S(1)\Theta) \,\Big|\, \mathcal{G}_0 \Big)$$

$$= (\mathbb{E}(X 1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0) - S(1)\Theta)\, \mathbb{E}\big((X 1(\tau>1) - \mathbb{E}(X 1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0)) \mid \mathcal{G}_0 \big) = 0.$$

On siis minimoitava

$$\mathbb{E}\left([\mathbb{E}(X 1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0) - S(1)\Theta]^2 \right)$$

$$= \mathbb{E}\left([{}_1p_x\, \mathbb{E}(X\mid\mathcal{G}_0) - S(1)\Theta]^2 \right)$$

$$= \mathbb{E}\left({}_1p_x^2\, \mathbb{E}(X\mid\mathcal{G}_0)^2 - {}_1p_x^2\, \mathbb{E}(X^2\mid\mathcal{G}_0) \right)$$
$$+ \mathbb{E}\left({}_1p_x^2\, \mathbb{E}(X^2\mid\mathcal{G}_0) - 2\,{}_1p_x\, \mathbb{E}(X\mid\mathcal{G}_0) S(1)\Theta + (S(1)\Theta)^2 \right)$$

$$= a + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(({}_1p_x X - S(1)\Theta)^2 \mid \mathcal{G}_0 \right) \right) = a + \mathbb{E}\left([{}_1p_x X - S(1)\Theta]^2 \right),$$

missä a ei riipu Θ:sta. Minimoiva salkku on ${}_1p_x \bar{\Theta}$.