Sijoitustoiminnan matematiikka 12.5.2015

1. Finanssimarkkinoilla on kaksi arvopaperia. Toinen on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i = 0$ ja toinen osake, jolla on kolme mahdollista arvoa hetkellä 1, nimittäin $0, 2$ ja 3. Osakkeen hinta hetkellä 0 on 1. Osoita, että markkinat ovat arbitraasivapaat.

Lisätään markkinoille optio, jonka haltijalla on oikeus myydä 1 eurolla yksi osake hetkellä 1. Määrää option arbitraasivapaat hetken 0 hinnat.

2. Jälleenvakuutusmarkkinoilla on K toimijaa. Toimijan k alkupääoma on U_k ja alkuperäinen vakuutettava kokonaisvahinkomäärä X_k. Oletetaan, että $|X_k| \leq M$ melkein varmasti kaikilla $k = 1, \dots, K$, missä M on positiivinen vakio. Olkoon $X = X_1 + \cdots + X_K$ markkinoiden yhteenlaskettu kokonaisvahinkomäärä.

Sallittua allokointia $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K)$ sanotaan Pareto-optimaaliseksi varianssin suhteen, ellei ole sellaista sallittua allokointia $(Y_1, \dots, Y_K)$, että

$$\mathrm{Var}\,(Y_k) \leq \mathrm{Var}\,(\bar{X}_k)$$

kaikilla $k = 1, \dots, K$ siten, että erisuuruus on aito vähintään yhdellä toimijalla. Osoita, että $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K)$ on Pareto-optimaalinen edellä esitetyssä mielessä, jos $\bar{X}_k = h_k X$, missä $h_1, \dots, h_K$ ovat positiivisia vakioita ja $h_1 + \cdots + h_K = 1$.

3. Markkinoilla on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i = 0$ ja joukko riskillisiä arvopapereita. Riskillisten arvopapereiden odotustuotot eivät ole kaikki samoja ja tuottoasteiden kovarianssimatriisi on kääntyvä. Odotustuottoa $r \geq 1$ vastaava minimaalinen riskillisistä arvopapereista muodostetun salkun tuottoasteen varianssi on

$$\sigma^2(r) = r^2 - 2r + 2.$$

a) Toimija muodostaa bondeista ja riskillisistä arvopapereista CAP-mallin mukaisen optimaalisen salkun odotustuotolla $r = 1$. Määrää salkun tuottoasteen hajonta.

b) Toimija sijoittaa markkinoille 1000 euroa a-kohdan mukaisesti. Mikä on bondiin sijoitettava rahamäärä.

4. Finanssimarkkinoilla on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$ (arvopaperi 1) ja riskilliset arvopaperit $2, \dots, N$. Arvopaperin n arvo hetkellä k olkoon $S_n(k), n = 1, \dots, N$, $k = 0, 1$. Merkitään $S(k) = (S_1(k), \dots, S_N(k))$, $k = 0, 1$. Markkinat ovat arbitraasivapaat.

Sijoitussidonnaisessa vakuutuksessa yhtiö suorittaa hetkellä 1 vakuutetulle määrän X, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Olkoon τ vakuutetun jäljellä oleva elinaika ja

$${}_kp_y = \mathbb{P}(\tau > y + k \,|\, \tau > y), \quad y \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Vakuutettu on x-ikäinen hetkellä 0. Oletetaan, että X on toistettavissa finanssimarkkinoilla eräällä salkulla $(\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ ja että τ on stokastisesti riippumaton vektorista $S(1)$. Etsittävä hetkellä 0 hankittava salkku $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)^T$, joka minimoi keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left([X1(\tau > 1) - S(1)\eta]^2\right).$$

Sijoitustoiminnan matematiikka 12.5.-15

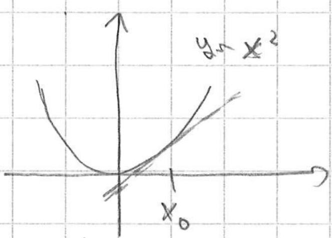
1. Q on riskineutraali, jos $q_j = Q(S_2(1)=j) > 0$, $j = 0, 2, 3$, ($S_2(1)$ = osakkeen arvo hetkellä 1) ja

$$\begin{cases} 2q_2 + 3q_3 = 1 \\ q_0 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_2 = 2 - 3q_0 \\ q_3 = 2q_0 - 1 \end{cases}.$$

Voidaan ottaa $q_0 \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \Rightarrow$ AV.

Option AV-hinnat ovat $S_2(0) \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, sillä

$$E_Q\left((1 - S_2(1))^+\right) = q_0.$$

2. 

Konveksisuuden nojalla

$$x^2 \geq x_0^2 + 2x_0(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Jos $(Y_1, \dots, Y_K)$ sallittu, $\mu_k = E(Y_k)$, $\bar{\mu}_k = E(\bar{X}_k)$, niin

$$(Y_k - \mu_k)^2 \geq (\bar{X}_k - \bar{\mu}_k)^2 + 2\underbrace{(\bar{X}_k - \bar{\mu}_k)}_{= h_k(X - E(X))}(Y_k - \mu_k - \bar{X}_k + \bar{\mu}_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{h_k}(Y_k - \mu_k)^2 \geq$$

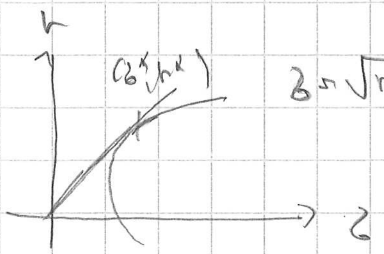
$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{h_k}(\bar{X}_k - \bar{\mu}_k)^2 + 2(X - E(X)) \underbrace{\sum_{k=1}^{K}(Y_k - \mu_k - \bar{X}_k + \bar{\mu}_k)}_{=0}$$

clearing-ehdon nojalla

Ottamalla odotusarvo saadaan

$$\sum \frac{1}{h_k} \operatorname{Var}(Y_k) \geq \sum \frac{1}{h_k} \operatorname{Var}(\bar{X}_k),$$ josta väite.

3.



$z = \sqrt{r^2 - 2r + 2}$

$z^2 = r^2 - 2r + 2 \Rightarrow 2z = 2rr' - 2r' \Rightarrow r' = \frac{z}{r-1}$

Tangentin yhtälö on

$$r - r^* = \frac{z^*}{r^*-1}(z - z^*)$$

Lisäksi $\quad -r^* = -\frac{(z^*)^2}{r^*-1} \quad$ (koska $z = 0$)

1. $(z^*)^2 = (r^*)^2 - r^* = (r^*)^2 - 2r^* + 2$

$\rightarrow r^* = 2, \quad z^* = \sqrt{2}$

Tangentin yhtälö on siis $\quad r - 2 = \sqrt{2}(z - \sqrt{2})$ eli

$$r = \sqrt{2}\, z.$$

a) Jos $r = 1$, on $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Bondiin sijoitettava osuus w määräytyy ehdosta

$$w \cdot 0 + (1-w) \cdot r^* = 1 \text{ eli } w = \frac{1}{2},$$

bondiin sijoitetaan 500.

4. Tehtävä on oleellisesti aiemman harj. 10, tehtävä 3:

$$\mathbb{E}\left([\underline{X}\,1(\tau>1) - S(1)\eta]^2\right) \qquad (\mathcal{G}_0 = \sigma(S(1)))$$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}([\ \ ]^2 \mid \mathcal{G}_0)\right) = \mathbb{E}\left([\underline{X}\,1(\tau>1) - \mathbb{E}(\underline{X}\,1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0)]^2\right)$$

$$+ \mathbb{E}\left([\mathbb{E}(\underline{X}\,1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0) - S(1)\eta]^2\right),$$

sillä

$$\mathbb{E}\left((\underline{X}\,1(\tau>1) - \mathbb{E}(\underline{X}\,1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0))(\mathbb{E}(\underline{X}\,1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0) - S(1)\eta)\mid\mathcal{G}_0\right)$$

$$= (\mathbb{E}(\underline{X}\,1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0) - S(1)\eta)\,\mathbb{E}\left((\underline{X}\,1(\tau>1) - \mathbb{E}(\underline{X}\,1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0))\mid\mathcal{G}_0\right) = 0.$$

On siis minimoitava

$$\mathbb{E}\left([\mathbb{E}(S(1)\Theta\,1(\tau>1)\mid\mathcal{G}_0) - S(1)\eta]^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\left([{}_1p_x\,S(1)\Theta - S(1)\eta]^2\right).$$

Tämä on $=0$, kun $\eta = {}_1p_x\,\Theta$.