**Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 10, 15.4.2015**

1. Kahden periodin finanssimarkkinoilla on pankkitili, jonka vuosikorko on vakio $i \geq 0$ molemmilla periodeilla (arvopaperi 1) ja riskilliset arvopaperit $2, \ldots, N$. Arvopaperin $n$ arvo hetkellä $k$ olkoon $S_n(k), n = 1, \ldots, N$, $k = 0, 1, 2$. Merkitään $S(k) = (S_1(k), \ldots, S_N(k))$, $k = 0, 1, 2$. Markkinat ovat arbitraasivapaat.

Sijoitussidonnaisessa vakuutuksessa yhtiö suorittaa hetkellä 2 vakuutetulle määrän $X$, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Olkoon $\tau$ vakuutetun jäljellä oleva elinaika ja

$$ {}_kp_y = \mathbb{P}(\tau > y + k \,|\, \tau > y), \quad y \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. $$

Oletetaan, että $X$ on toistettavissa finanssimarkkinoilla eräällä omavaraisella strategialla $\{\theta(k); k = 1, 2\}$ ja että $\tau$ on stokastisesti riippumaton arvoista $S(1)$ ja $S(2)$. Olkoon

$$ \begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \sigma\left(S_2(1), \ldots, S_N(1), 1(\tau \in (0, 1])\right), \\ \mathcal{G}_1 &= \sigma\left(S_2(1), \ldots, S_N(1), S_2(2), \ldots, S_N(2), 1(\tau \in (0, 1])\right). \end{aligned} $$

Olkoon $\eta(2)$ $\mathcal{F}_1$-mitallinen salkku. Osoita, että

$$ \begin{aligned} & \mathbb{E}\left([X1(\tau > 2) - S(2)\eta(2)]^2 | \mathcal{G}_1\right) \\ = \; & \mathbb{E}\left([X1(\tau > 2) - \mathbb{E}(X1(\tau > 2)|\mathcal{G}_1)]^2 | \mathcal{G}_1\right) + \mathbb{E}\left([\mathbb{E}(X1(\tau > 2)|\mathcal{G}_1) - S(2)\eta(2)]^2 | \mathcal{G}_1\right). \end{aligned} $$

2. (jatkoa) Olkoon vakuutettu $x$-ikäinen hetkellä 0. Osoita, että

$$ \mathbb{E}\left([X1(\tau > 2) - S(2)\eta(2)]^2 | \mathcal{F}_1\right) $$

minimoituu yli $\mathcal{F}_1$-mitallisten salkkujen $\eta(2)$ valinnalla $\eta(2) = {}_1p_{x+1}1(\tau > 1)\theta(2)$.

3. (jatkoa) Määrää lokaaliin keskineliöpoikkeaman minimointiin perustuva hetkellä 0 hankittava salkku. Toisin sanoen on etsittävä deterministinen salkku $\eta(1)$, joka minimoi keskineliöpoikkeaman

$$ \mathbb{E}\left([{}_1p_{x+1}1(\tau > 1)S(1)\theta(2) - S(1)\eta(1)]^2\right). $$

4. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot $u_k$ muotoa

$$ u_k(z) = \mu_k^{-1}(1 - e^{-\mu_k z}), \quad z \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, K, $$

missä $\mu_1, \ldots, \mu_K$ ovat positiivisia vakioita. Merkitään $\mu = (\sum_{k=1}^K \mu_k^{-1})^{-1}$. Alkuperäiset kokonaisvahinkomäärät $X_1, \ldots, X_K$ ovat rajoitettuja satunnaismuuttujia. Oletetaan, että markkinat ovat tasapainotilassa. Olkoon $X = X_1 + \cdots + X_K$. Osoita, että riippumatta alkupääomista tasapainohinnoittelija $\bar{\phi}$ määräytyy ehdosta

$$ \bar{\phi} = \left(\mathbb{E}(e^{\mu X})\right)^{-1} e^{\mu X}. $$

5. (jatkoa) Esscherin tariffiperiaatteessa vahinkomäärän $Y$ vakuutusmaksu $\pi(Y)$ on

$$ \pi(Y) = \mathbb{E}\left(Y e^{aY - c_Y(a)}\right), $$

missä $a$ on positiivinen vakio ja $c_Y$ kumulantit generoiva funktio,

$$ c_Y(t) = \log \mathbb{E}(e^{tY}), \quad t \in \mathbb{R}. $$

Osoita, että jos alkuperäiset kokonaisvahinkomäärät $X_1, \ldots, X_K$ ovat riippumattomia, niin niiden tasapainohinnat ovat Esscherin tariffiperiaatteen mukaisia ja $a = \mu$.