Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 8, 25.3.2015

1. Olkoot markkinoilla arvopaperit $1, \dots, N$ ja näiden hetken yksi arvot $S_1(1), \dots, S_N(1)$. Arvopaperi 1 on bondi, jolle $S_1(1) \equiv 1$ ja vuosikorko on $i \geq 0$. Muut arvopaperit ovat riskillisiä. Oletetaan, että $S_1(1), \dots, S_N(1)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Olkoot arvopapereiden lukumäärät $L_1, \dots, L_N$.

Markkinoilla on K toimijaa. Utiliteettifunktiot määräytyvät ehdoista

$$u_k(z) = \mu_k^{-1}(1 - e^{-\mu_k z}), \; z \in \mathbb{R}, \; k = 1, \dots, K,$$

missä $\mu_1, \dots, \mu_K$ ovat positiivisia vakioita. Merkitään $\mu = (\sum_{k=1}^K \mu_k^{-1})^{-1}$. Olkoon alkuallokointi $(\eta^1, \dots, \eta^K)$. Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi tasapainotila.

2. (jatkoa) Olkoon erityisesti $N = 2$. Osoita, että tasapainotilassa myös ϕ,

$$\phi = \frac{e^{-\mu A(1)}}{(1+i)\mathbb{E}(e^{-\mu A(1)})},$$

on hinnoittelija, missä $A(1)$ markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1.

Vihje: tehtävässä oletetaan tunnetuksi, että kuvaus $s \to \mathbb{E}(\xi e^{s\xi})/\mathbb{E}(e^{s\xi})$ on aidosti kasvava äärellisyysalueessan, jos $\mathrm{Var}\,(\xi) > 0$.

3. (jatkoa tehtävään 1) Oletetaan lisäksi, että $S_1(1), \dots, S_N(1)$ ovat stokastisesti riippumattomia. Osoita, että tasapainotilassa edellisen tehtävän muotoa oleva ϕ on hinnoittelija.

4. (jatkoa tehtävään 1) Oletetaan lisäksi, että finanssimarkkinat ovat täydelliset. Osoita, että markkinoilla on tasan yksi tasapainotila.

5. (jatkoa edellisen kerran tehtävään 4) Olkoon $A(1)$ markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1. Oletetaan, että $\mathbb{E}(A(1)) > 0$ ja että $\mu_1, \dots, \mu_K$ sellaisia, että

$$\mu_1 + \dots + \mu_K = \mathbb{E}(A(1)).$$

Osoita, että on olemassa sellainen varianssin suhteen Pareto-optimaalinen allokointi $(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$, että

$$\mathbb{E}(S(1)\bar{\theta}^k) = \mu_k, \quad k = 1, \dots, K.$$