Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 7, 18.3.2015

1. Olkoot markkinoilla arvopaperit $1, \ldots, N$ ja näiden hetken yksi arvot $S_1(1), \ldots, S_N(1)$. Arvopaperi 1 on bondi, jolle $S_1(1) \equiv 1$. Oletetaan, että $S_1(1), \ldots, S_N(1)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Olkoot arvopapereiden lukumäärät $L_1, \ldots, L_N$.

Markkinoilla on K toimijaa. Utiliteettifunktiot määräytyvät ehdoista

$$u_k(z) = \mu_k^{-1}(1 - e^{-\mu_k z}), \ z \in \mathbb{R}, \ k = 1, \ldots, K,$$

missä $\mu_1, \ldots, \mu_K$ ovat positiivisia vakioita. Merkitään $\mu = (\sum_{k=1}^K \mu_k^{-1})^{-1}$.

Tarkastellaan vaatimuksia

$$u_k'(S(1)\bar{\theta}^k) = h_k f, \tag{$*$}$$

missä $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on sallittu allokointi, $h_1, \ldots, h_K$ ovat positiivisia vakioita ja $f : \Omega \to (0, \infty)$ on satunnaismuuttuja. Osoita, että jos $(*)$ toteutuu kaikille toimijoille, niin f on muotoa

$$f = Ce^{-\mu A(1)},$$

missä C on positiivinen vakio ja $A(1)$ markkinoiden kokonaisarvo hetkellä yksi.

2. (jatkoa) Osoita, että kaikki $(*)$:n toteuttavat sallitut allokoinnit määräytyvät ehdoista

$$S(1)\bar{\theta}^k = \frac{\mu}{\mu_k} A(1) + c_k,$$

missä $c_1, \ldots, c_K$ ovat vakioita, joille $\sum_{k=1}^K c_k = 0$.

3. (jatkoa) Olkoon $K \geq 2$. Osoita, että Pareto-optimaalisia allokointeja on ääretön määrä.

4. Sallittua allokointia $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ sanotaan Pareto-optimaaliseksi varianssin suhteen, ellei ole sellaista sallittua allokointia $(\theta^1, \ldots, \theta^K)$, että

$$\mathrm{Var}\,(S(1)\theta^k) \leq \mathrm{Var}\,(S(1)\bar{\theta}^k)$$

kaikilla $k = 1, \ldots, K$ siten, että erisuuruus on aito vähintään yhdellä toimijalla. Osoita, että $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on Pareto-optimaalinen edellä esitetyssä mielessä, jos on olemassa sellaiset positiiviset vakiot $h_1, \ldots, h_K$ ja satunnaismuuttuja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että $S(1)\bar{\theta}^k = h_k f$ m.v. kaikilla $k = 1, \ldots, K$.

5. Olkoot toimijoiden utiliteettifunktiot $u_1, \ldots, u_K$. Olkoot $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$ positiivisia vakioita ja $\beta_1, \ldots, \beta_K$ mielivaltaisia reaalilukuja. Määritellään utiliteettifunktiot v_k ehdoista

$$v_k(z) = \alpha_k u_k(z) + \beta_k, \quad z \in \mathbb{R}, \ k = 1, \ldots, K.$$

Oletetaan, että $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on Pareto-optimaalinen allokointi, kun utiliteettifunktiot ovat $u_1, \ldots, u_K$. Osoita, että sama pätee, kun utiliteettifunktiot ovat $v_1, \ldots, v_K$.