

Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 4, 18.2.2015

1. Markkinoilla on neljä arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla i ja arvopaperi 2 on osake. Arvopaperi 3 on eurooppalainen myyntioptio, jonka omistajalla on oikeus myydä hetkellä yksi 1 osake hintaan γ ja arvopaperi 4 eurooppalainen osto-optio, jonka omistajalla on oikeus ostaa hetkellä yksi 1 osake hintaan γ . Olkoon p osakkeen, q myyntioption ja r osto-option hinta hetkellä nolla. Osoita, että arbitraasivapailla markkinoilla pätee ns. *myynti-ostopariteetti*

$$r + \frac{\gamma}{1+i} = p + q.$$

2. Markkinoilla on kolme arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i > 0$ ja arvopaperi 2 on osake, jonka hinta hetkellä nolla on p . Arvopaperi 3 on eurooppalainen osto-optio, jonka omistajalla on oikeus ostaa hetkellä yksi 1 osake hintaan p . Option hetken nolla hinta on q . Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat.

Lisätään markkinoille arvopaperi, jonka ehdot ovat seuraavat. Hetkellä yksi arvopaperin omistajalle palautetaan siitä hetkellä nolla maksettu hinta. Jos osakkeen arvo hetkestä nolla hetkeen yksi on noussut, omistaja saa lisäksi yhden osakkeen kurssinousua vastaavan rahamäärän. Määrää arvopaperin hetken nolla arbitraasivapaat hinnat.

3. Markkinoilla on nollakuponkibondi vuosikorolla i ja osake, jonka hinta hetkellä nolla on p ja arvo hetkellä yksi $S_2(1)$. Markkinat ovat arbitraasivapaat. Tarkastellaan hetkellä nolla tehtävää sopimusta, jossa toimija sitoutuu ostamaan yhden osakkeen hetkellä yksi hintaan C , missä C on deterministinen vakio. Hetkellä nolla raha ei liiku. Määrää C siten, että arbitraasivapaus säilyy.

4. Tarkastellaan luentojen kohdan 5.1 mukaisia markkinoita, jotka oletetaan arbitraasivapaiksi. Olkoon Φ hinnoittelijoiden joukko. Lisätään markkinoille sopimus X , jonka hetken nolla hinta on V . Olkoon

$$\underline{V} = \inf\{\mathbb{E}(\phi X) \mid \mathbb{E}(\phi X) < \infty, \phi \in \Phi\},$$

$$\bar{V} = \sup\{\mathbb{E}(\phi X) \mid \mathbb{E}(\phi X) < \infty, \phi \in \Phi\}.$$

Oletetaan, että $\underline{V} < \bar{V}$ ja että $V \in (\underline{V}, \bar{V})$. Osoita, että laajennetut markkinat ovat arbitraasivapaat.

5. (jatkoa) Olkoon lisäksi $\bar{V} < \infty$ ja $W > \bar{V}$. Osoita, että on olemassa sellainen alkupe-
räisten arvopapereiden muodostama salkku θ , että $S(0)\theta = W$ ja $S(1)\theta \geq X$ m.v.