

### Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 3, 11.2.2015

1. Markkinoilla on kaksi arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla  $i \geq 0$  ja arvopaperi 2 osake, jonka mahdolliset arvot hetkellä 1 ovat  $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ , missä  $M \geq 3$  ja

$$0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_M.$$

Olkoon  $p$  osakkeen hinta hetkellä 0.

Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat. Osoita, että  $p \in (\frac{\alpha_1}{1+i}, \frac{\alpha_M}{1+i})$ .

2. (jatkoa) Olkoot arvopaperit kuten edellisessä tehtävässä ja  $p \in (\frac{\alpha_1}{1+i}, \frac{\alpha_M}{1+i})$ . Osoita, että markkinat ovat arbitraasivapaat.

3. (jatkoa) Olkoot arvopaperit kuten tehtävässä 1 ja  $p \in (\frac{\alpha_1}{1+i}, \frac{\alpha_M}{1+i})$ . Olkoon  $m \in \{2, \dots, M-1\}$ . Lisätään markkinoille arvopaperi, joka antaa omistajalleen 1 euron, jos osakkeen arvo hetkellä 1 on  $\alpha_m$  ja muuten ei mitään. Määrä uuden arvopaperin arbitraasivapaat hinnat.

4. Finanssimarkkinoilla on kolme arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla  $i \geq 0$  ja arvopaperit 2 ja 3 ovat osakkeita. Arvopaperin  $n$  hetken  $k$  arvo on  $S_n(k)$ ,  $n = 1, 2, 3$ ,  $k = 0, 1$ .

Oletetaan, että osakkeiden arvot  $S_2(1)$  ja  $S_3(1)$  ovat toisistaan riippumattomia. Oletetaan, että markkinat, joilla on vain arvopaperit 1 ja 2, ovat arbitraasivapaat. Samoin oletetaan, että markkinat, joilla on vain arvopaperit 1 ja 3, ovat arbitraasivapaat. Osoita, että markkinat, joilla on arvopaperit 1, 2 ja 3, ovat myös arbitraasivapaat.

5. Olkoot arvopaperit kohdan 5.1 alun mukaiset ja  $T = 1$ . Oletetaan, että

$$S_N(1) = \theta_1 S_1(1) + \dots + \theta_{N-1} S_{N-1}(1)$$

eräille  $\theta_1, \dots, \theta_{N-1} \in \mathbb{R}$ . Osoita lauseen 5.1 avulla, että arbitraasivapailla markkinoilla

$$S_N(0) = \theta_1 S_1(0) + \dots + \theta_{N-1} S_{N-1}(0).$$