

Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 2, 4.2.2015

1. Olkoon vuoden 1 vuosikorko $i_1 = 0.05$. Vuoden 2 vuosikorolla \mathcal{I}_2 on jakauma

$$\mathbb{P}(\mathcal{I}_2 = 0.05) = 1/2, \quad \mathbb{P}(\mathcal{I}_2 = 0.08) = 1/2.$$

Hetkellä 0 on vapaasti ostettavissa yhden ja kahden vuoden nollakuponkibondeja vuosikorolla $s_1 = i_1$ ja $s_2 = 0.07$. Osoita, että markkinoilla on arbitraasimahdollisuus.

2. (jatkoa) a) Olkoon korkorakenne hetkellä nolla muuten kuten edellisessä tehtävässä, mutta nyt $i_1 = s_1 = 0.08$. Tarkastellaan strategiaa, jossa henkilö sijoittaa hetkellä nolla C euroa kahden vuoden ja $-C$ euroa yhden vuoden bondiin, missä $C \in \mathbb{R}$. Osoita, että sijoitusten arvo yhteensä hetkellä yksi on negatiivinen todennäköisyydellä $1/2$, jos $C \neq 0$.

3. Olkoon vuoden 1 vuosikorko $i_1 = 0.08$. Vuoden j vuosikorolla \mathcal{I}_j on jakauma

$$\mathbb{P}(\mathcal{I}_j = 0.05) = 1/2, \quad \mathbb{P}(\mathcal{I}_j = 0.08) = 1/2, \quad j = 2, 3.$$

Oletetaan, että \mathcal{I}_2 ja \mathcal{I}_3 ovat riippumattomia. Korkorakenne hetkellä 1 määräytyy siten, että $s_{11} = \mathcal{I}_2$ ja $s_{12} = 0.07$ (yhden ja kahden vuoden nollakuponkibondien vuosikorot). Hetkellä 2 yhden vuoden nollakuponkibondin vuosikorko on \mathcal{I}_3 .

Hetkellä 0 tehdään seuraava vuosikorosta \mathcal{I}_2 riippuva strategia (ts. määrätään $C(0.05)$ ja $C(0.08)$): hetkellä 1 sijoitetaan $C(\mathcal{I}_2)$ euroa kahden ja $-C(\mathcal{I}_2)$ euroa yhden vuoden bondiin. Etsi sellainen funktio C , että sijoitusten arvo yhteensä hetkellä 2 on positiivinen todennäköisyydellä $1/2$ ja varmasti vähintään nolla.

4. Olkoon A_1, \dots, A_T kiinteä deterministinen kassavirta. Oletetaan, että $A_j > 0, \forall j$, ja että suoritus A_j tapahtuu hetkellä j . Olkoon vuosikorko s positiivinen. Merkitään

$$g(s) = \sum_{j=1}^T (1+s)^{-j} A_j$$

ja

$$M(s) = \sum_{j=1}^T j^2 (1+s)^{-j} A_j / g(s).$$

Olkoon edelleen $D(s)$ vuosikorkoa s vastaava kassavirran duraatio. Osoita, että

$$M(s) \geq D(s)^2.$$

5. (jatkoa) Osoita, että D on vähenevä s :n funktio alueessa $s > 0$.