

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Reaalianalyysi I  
Harjoitus 7

Näillä tehtävillä voi korottaa laskuharjoituksista saatavien lisäpisteiden määrää. Palautettava kirjallisesti laskuharjoitusten pitäjille **torstaihin 7.5.2015 klo 16 mennessä**.

1. Olkoot  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absoluuttisesti jatkuvia. Osoita, että  $fg$  on absoluuttisesti jatkuva.
2. Osoita, että absoluuttisesti jatkuva funktio  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on rajoitetusti heilahteleva.
3. Onko funktio  $f(x) = \sqrt{x}$  absoluuttisesti jatkuva välillä  $[0, 1]$ ?
4. Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitetusti heilahteleva. Merkitään  $V(x) = V_f(a, x)$ . Osoita, että
  - (a)  $f$  on jatkuva  $\iff V$  on jatkuva,
  - (b)  $f$  on absoluuttisesti jatkuva  $\iff V$  on absoluuttisesti jatkuva.
5. Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absoluuttisesti jatkuva ja  $E \subset [a, b]$  0-mittainen joukko ( $m(E) = 0$ ). Osoita, että myös kuvajoukko  $fE$  on 0-mittainen.
6. Onko funktio  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{\pi}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

absoluuttisesti jatkuva?