Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 6
30.4.2015

1. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mitallinen ja $m(E) > 0$. Osoita, että tällöin joukko
$$E - E = \{a - b : a, b \in E\}$$
sisältää välin.

2. (a) Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Osoita, että jokainen G:n piste on G:n tiheyspiste.
   (b) Näytä esimerkillä, että myös avoimen joukon G komplementin piste voi olla G:n tiheyspiste.
   (c) Konstruoi sellainen $\mathbb{R}$:n osajoukko A, joka ei ole avoin, vaikka jokainen piste $x \in A$ on A:n tiheyspiste.

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen 0-mittainen joukko ($m(A) = 0$) ja $G_k \supset A$, $k \in \mathbb{N}$, jono avoimia $\mathbb{R}$:n osajoukkoja, joille $m(G_k) \le 2^{-k}$. Määritellään funktiot $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla
$$f_k(x) = m\big(]-\infty, x] \cap G_k\big) = \int_{-\infty}^{x} \chi_{G_k}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Osoita, että $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ määrittelee jatkuvan kasvavan funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $\underline{D}f(x) = +\infty$ kaikilla $x \in A$.

4. (a) Anna (helppo) esimerkki funktiosta $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on rajoitetusti heilahteleva, muttei jatkuva.
   (b) Olkoon $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$
   Osoita, että f on jatkuva, muttei rajoitetusti heilahteleva.

5. Funktio $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on Lipschitz-funktio, jos on olemassa sellainen vakio $L < \infty$, että $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ kaikilla $x, y \in [a,b]$. Osoita, että:
   (a) jatkuvasti derivoituva funktio $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on Lipschitz,
   (b) jokainen Lipschitz-funktio on rajoitetusti heilahteleva,
   (c) jokainen Lipschitz-funktio on derivoituva m.k.

6. Olkoot $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahtelevia. Osoita, että
$$V_{fg}(a,b) \le M_f V_g(a,b) + M_g V_f(a,b),$$
missä $M_f = \sup\{|f(x)| \colon x \in [a,b]\}$ ja $M_g = \sup\{|g(x)| \colon x \in [a,b]\}$.