Matematiikan laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 5
23-24.4.2015

1. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $f \in L^p(X)$ ja $t > 0$. Johda *Chebyshevin epäyhtälö*
$$\mu\big(\{x \in X \colon |f(x)| > t\}\big) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^p .$$

2. Sanomme, että mitallinen funktio $f \colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ kuuluu "heikkoon L^1-avaruuteen" weak-$L^1(\mathbb{R}^n)$, jos on olemassa vakio $c = c_f < \infty$ siten, että
$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| > t\}\big) \leq \frac{c}{t} \quad \forall t > 0.$$
   (a) Totea, että $L^1(\mathbb{R}^n) \subset$ weak-$L^1(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Osoita esimerkin avulla, että weak-$L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$.

3. Olkoot $A,\ B \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia siten, että
$$m\big(A \cap B^n(x, 1/i)\big) \leq m\big(B \cap B^n(x, 1/i)\big),$$
kun $x \in A,\ i \in \mathbb{N}$, ja $B^n(x, 1/i) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |x - y| < 1/i\}$. Osoita, että $m(A) \leq m(B)$.

4. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että $Mf(x) < +\infty$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Olkoon $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ lokaalisti integroituva funktio, $t > 0$, $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| \leq t/2\},\ g = f\chi_{A_t}$ ja $h = f - g$. Osoita, että
$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon Mf(x) > t\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \colon Mh(x) > t/2\}.$$

6. Olkoon $f \colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen. Osoita, että jokaisella $t > 0$ pätee:
$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon Mf(x) > t\} \leq \frac{2 \cdot 5^n}{t} \int_{\{x \colon |f(x)| > t/2\}} |f(y)| dy.$$