Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 4
16-17.4.2015

1. Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $f, f_k \in L^p(X),\ k \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että
$$f_k \to f \text{ m.k. ja } \|f_k\|_p \to \|f\|_p.$$
Osoita, että $\|f_k - f\|_p \to 0$, toisin sanoen $f_k \to f$ $L^p(X)$:ssä.

2. Anna esimerkki funktioista $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja $g \in L^1(\mathbb{R})$, joilla funktio
$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$
ei ole integroituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $g_\varepsilon = m\big(B(0,\varepsilon)\big)^{-1}\chi_{B(0,\varepsilon)}$. Osoita, että $g_\varepsilon * f(x) \to f(x)$, kun $\varepsilon \to 0+$.

4. Oletetaan, että $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, ja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että $f * g(x)$ on olemassa m.k. $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja
$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

5. Olkoon $g \geq 0$ mitallinen funktio $\mathbb{R}^n$:ssä. Oletetaan, että on olemassa sellainen vakio C, että $\|f * g\|_p \leq C\|f\|_p$ kaikilla ei-negatiivisilla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että $C \geq \|g\|_1$.

6. Todista seuraava peitelause: Olkoon $\{B(x_i, r_i)\}, i \in I$, äärellinen kokoelma metrisen avaruuden (X, d) kuulia. Silloin on olemassa $J \subset I$ siten, että kuulat $B(x_i, r_i), i \in J$, ovat (pareittain) erillisiä ja
$$\bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) \subset \bigcup_{i \in J} B(x_i, 3r_i).$$