Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 3
9-10.4.2015

1. Olkoon X mikä tahansa joukko, $\Gamma = \mathcal{P}(X)$, ja μ lukumäärämitta. [Tällöin merkitään $\ell^p(X) = L^p(X, \mu)$.] Olkoon $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Osoita, että $\ell^q(X) \subset \ell^p(X)$ ja
$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_1.$$
Vertaa tätä ja Lausetta 1.33.

2. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $1 \leq p \leq q < \infty$, ja $A \in \Gamma$ sellainen mitallinen joukko, että $0 < \mu(A) < \infty$. Osoita, että
$$\left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f|^q \, d\mu\right)^{1/q}$$
kaikilla $f \in L^q(A)$.

3. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $1 \leq p < q < r \leq \infty$ ja $f \in L^q(X)$. Osoita, että on olemassa sellaiset $g \in L^p(X)$ ja $h \in L^r(X)$, että $f = g + h$.

4. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus, $1 \leq p < \infty$, ja $f_i \in L^p(X)$, $i \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että f on sellainen mitallinen funktio, että $\|f_i - f\|_p \to 0$. Osoita, että on olemassa jonon (f_i) osajono (f_{i_k}) siten, että $f_{i_k} \to f$ melkein kaikkialla.

5. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus ja $1 \leq p, q < \infty$.
   (a) Oletetaan, että $f_i \in L^p$, $i \in \mathbb{N}$, $\|f_i - f\|_p \to 0$ ja $f_i \to g$ m.k. Osoita, että $f = g$ m.k.
   (b) Oletetaan, että $f_i \in L^p \cap L^q$, $i \in \mathbb{N}$, $\|f_i - f\|_p \to 0$ ja $\|f_i - g\|_q \to 0$ m.k. Osoita, että $f = g$ m.k.

6. Mitallisten funktioiden jonon (f_i) sanotaan *suppenevan mitan mielessä kohti mitallista funktiota* f, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ pätee
$$\lim_{i \to \infty} \mu\big(\{x \in X \colon |f_i(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) = 0.$$
Osoita, että jono (f_i) suppenee mitan mielessä kohti f:ää, jos $\|f_i - f\|_p \to 0$. Osoita esimerkillä, ettei käänteinen aina päde.