Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 2
26-27.3.2015

1. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus ja olkoon $f \in L^\infty(X)$. Osoita, että
$$\|f\|_\infty = \inf\big\{\sup\{|f(x)| \colon x \in X \setminus N\} \colon N \in \Gamma, \mu(N) = 0\big\}.$$

2. Olkoon $\mu(X) < \infty$ ja $1 \leq q < p < \infty$.
   (a) Osoita *käyttämättä* Hölderin epäyhtälöä, että $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.
   (b) Osoita (Hölderin epäyhtälöllä), että
   $$\|f\|_q \leq \|f\|_p \,(\mu(X))^{(p-q)/pq},$$
   kun $f \in L^p(\mu)$.

3. Osoita, että $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subset L^r(\mu)$, jos $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$.

4. Olkoon $f \colon B^n(0,1) \to \dot{\mathbb{R}}$, $f(x) = \log|x|$. Millä p:n arvoilla $f \in L^p(B^n(0,1))$?

5. Oletetaan, että $f_j \to f$ avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $g_j \to g$ avaruudessa $L^q(\mathbb{R}^n)$, missä $p, q > 1$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Osoita, että $f_j g_j \to fg$ avaruudessa $L^1(\mathbb{R}^n)$.

6. Anna esimerkki funktioista $f_i, f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, joilla $f_i \to f$ tasaisesti, mutta (f_i) ei suppene $L^p(\mathbb{R})$:ssä.