Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 1
19-20.3.2015

1. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $E \in \Gamma$. Määritellään
$$\Gamma_E = \{A \cap E \colon A \in \Gamma\} \quad \text{ja} \quad \mu_E = \mu|\Gamma_E.$$
Osoita, että (E, Γ_E, μ_E) on mitta-avaruus.

2. Olkoon (X, Γ, μ), $X \neq \emptyset$, mitta-avaruus s.e. $\{x\} \in \Gamma$ kaikilla $x \in X$. Sanomme, että mitta μ on *diskreetti,* jos on olemassa numeroituvva joukko $K \subset X$ s.e. $\mu(X \setminus K) = 0$. Osoita, että μ on diskreetti, jos ja vain jos on olemassa numeroituva $K \subset X$ s.e.
$$\mu = \sum_{x \in K} \mu(\{x\})\delta_x,$$
missä $\delta_x \colon \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ on Diracin mitta pisteessä $x \in X$ [ks. Esimerkki 1.4].

3. Olkoot $I = [0,1] \times [0,1]$ ja $f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3$, kun $(x,y) \in I \setminus \{(0,0)\}$, sekä $f(0,0) = 0$. Laske integraalit
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx \quad \text{ja} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy.$$
Onko f integroituva yli I:n?

4. Merkitään $\mu = m_n | \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$. Etsi esimerkki sellaisesta Borel-funktioiden $f_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, jonosta ja funktiosta $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, että $f_j(x) \to f(x)$ μ-m.k. x, kun $j \to \infty$, mutta f ei ole Borel-funktio.

5. Määritellään jokaista $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti joukko
$$\tilde{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \colon x - y \in A\}.$$
Osoita, että $m_{2n}(\tilde{A}) = 0$, jos $m_n(A) = 0$.

6. Etsi sellainen jono $p = (p_1, p_2, \ldots)$, että sitä vastaavan Cantorin joukon mitta on $\frac{1}{4}$.