Reaalianalyysi I, kevät 2015
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Lyhyehkö kertaus integrointiteorian perusteista

Kurssi Reaalianalyysi I on tietyssä mielessä johdantokurssi, joka esittelee monia reaalianalyysin peruskäsitteitä ja -työkaluja. Kurssin pohjana toimii yleisempi integrointiteoria, joka rakennettiin kurssilla Mitta ja integraali Lebesgue-mitan tapauksessa. Suurin osa kyseisellä kurssilla esitetyistä todistuksista toimii sellaisenaan myös (täydellisten) mitta-avaruuksien tapauksessa. Alle on koottu integrointiteorian perustuloksia yleisemmällä kielellä muotoiltuna. Todistuksia ei esitetä, mutta jokaisen tuloksen yhteydessä on viite todistukseen (viiteluettelo on viimeisellä sivulla).

Täydellinen mitta-avaruus.

Määritelmä 1. Kokoelma $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(X)$ on joukon X *σ-algebra*, jos

$$\text{(i) } \emptyset \in \Gamma; \qquad \text{(ii) } A \in \Gamma \Rightarrow A^c \in \Gamma; \qquad \text{(iii) } A_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma.$$

Määritelmä 2. Olkoon Γ joukon X σ-algebra. Kuvaus $\mu \colon \Gamma \to [0, +\infty]$ on joukon X *mitta*, jos

$$\text{(i) } \mu(\emptyset) = 0; \qquad \text{(ii) } A_i \in \Gamma \text{ erillisiä }, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Tällöin kokoelma Γ on *μ-mitallisten joukkojen kokoelma* ja kolmikko (X, Γ, μ) on *mitta-avaruus*.

Esimerkki 3. Esimerkiksi seuraavat kolmikot ovat mitta-avaruuksia. Monet muut mitta-avaruudet ovat huomattavasti monimutkaisempia.

1. $(\mathbb{R}^n, \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n, m)$, jossa m on n-ulotteinen Lebesguen mitta ja $\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallisten joukkojen kokoelma.
2. $(A, \mathcal{P}(A), \mu)$, jossa A on mikä tahansa joukko ja $\mu(B) = \#B$ (joukon B alkioiden lukumäärä).
3. $(A, \mathcal{P}(A), \delta_a)$, jossa A on mikä tahansa joukko, $a \in A$ on kiinnitetty piste ja $\delta_a(B) = \chi_B(a)$.

Määritelmä 4. Mitta-avaruus (X, Γ, μ) on *täydellinen*, jos

$$E \in \Gamma, \mu(E) = 0, F \subseteq E \Rightarrow F \in \Gamma,$$

eli 0-mittaisten joukkojen osajoukot ovat mitallisia.

Lause 5 ([2, Lause 1.12])**.** *Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Tällöin on olemassa sellainen täydellinen mitta-avaruus $(X, \bar{\Gamma}, \bar{\mu})$, että $\Gamma \subseteq \bar{\Gamma}$ ja $\bar{\mu}|\Gamma = \mu$.*

Mitta-avaruus voidaan siis aina täydellistää, joten voimme olettaa, että mitta-avaruus (X, Γ, μ) on täydellinen. Tällöin voimme puhua myös luontevasti käsitteestä *melkein kaikkialla*:

Määritelmä 6. Sanomme, että annettu väite pätee joukossa $A \in \Gamma$ *melkein kaikkialla* (m.k. tai μ-m.k.), jos se pätee joukossa $A \setminus B$, jossa $B \in \Gamma$ on 0-mittainen joukko.

Olkoon (X, Γ, μ) tästä eteenpäin täydellinen mitta-avaruus.

Mitan konvergenssi.

Lause 7 ([1, Lauseet 1.59 ja 1.60]).

i) *Oletetaan, että* $A_i \in \Gamma$ *jokaisella* $i \in \mathbb{N}$ *ja* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq X$. *Tällöin*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

ii) *Oletetaan, että* $B_i \in \Gamma$ *jokaisella* $i \in \mathbb{N}$, $X \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ *ja* $\mu(B_k) < +\infty$ *jollakin* $k \in \mathbb{N}$. *Tällöin*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i).$$

Mitalliset kuvaukset.

Määritelmä 8. Olkoon $A \in \Gamma$. Kuvaus $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ on *μ-mitallinen* (lyhyemmin: mitallinen), jos

$$f^{-1}\{-\infty\} \in \Gamma, \qquad f^{-1}\{+\infty\} \in \Gamma \qquad \text{ja} \qquad f^{-1}U \in \Gamma$$

kaikilla avoimilla $U \subseteq \mathbb{R}$, kun $\dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Lause 9 ([1, Lause 2.5]). *Olkoon* $A \in \Gamma$ *ja* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *jatkuva kuvaus. Tällöin kuvaus* f *on mitallinen.*

Lause 10 ([1, Lause 2.11]). *Olkoot* $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallisia,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ja* $a > 0$. *Tällöin myös kuvaukset* $f + g$, fg, λf *ja* $|f|^a$ *ovat mitallisia, jos ne ovat määriteltyjä.*

Lause 11 ([1, Lause 2.12]). *Olkoon* $A \in \Gamma$ *ja* $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$. *Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

(1) *kuvaus* f *on mitallinen;*
(2) *joukko* $E_a := \{x \in A\colon f(x) < a\}$ *on mitallinen kaikilla* $a \in \mathbb{R}$*;*
(3) *joukko* $E'_a := \{x \in A\colon f(x) > a\}$ *on mitallinen kaikilla* $a \in \mathbb{R}$*;*
(4) *joukko* $E''_a := \{x \in A\colon f(x) \leq a\}$ *on mitallinen kaikilla* $a \in \mathbb{R}$*;*
(5) *joukko* $E'''_a := \{x \in A\colon f(x) \geq a\}$ *on mitallinen kaikilla* $a \in \mathbb{R}$.

Lause 12 ([1, Lauseet 2.23 ja 2.29]). *Olkoot funktiot* $f_i\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$, *mitallisia. Tällöin myös (pisteittäin määritellyt) funktiot* $\sup_{i\in\mathbb{N}} f_i$, $\inf_{i\in\mathbb{N}} f_i$, $\limsup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ *ja* $\liminf_{i\in\mathbb{N}} f_i$ *ovat mitallisia. Jos lisäksi* $f_i \to f$ *m.k., niin funktio* f *on mitallinen.*

Yksinkertaisen funktion integraali.

Määritelmä 13. Funktio $f\colon X \to [0, +\infty)$ on *yksinkertainen*, jos on olemassa sellaiset joukot $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \Gamma$ ja sellaiset positiiviset luvut $a_1, a_2, \ldots, a_k$, että $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}$. Toisin sanoen, funktio f on yksinkertainen, jos se on mitallinen ja positiivinen ja saa vain äärellisen monta eri arvoa.

Määritelmä 14. Olkoon $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}$ yksinkertainen funktio ja olkoon $F \in \Gamma$. Funktion f *integraali yli joukon* F on luku

$$I(f, F) := \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(F \cap A_i) \in [0, +\infty].$$

Merkitsemme lisäksi lyhyesti $I(f) := I(f, X)$.

Esimerkki 15. Olkoon μ 1-ulotteinen Lebesguen mitta. Tällöin funktiolle $f = 3\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} + 5\chi_{[99,100]} + \pi\chi_{[1000,+\infty)}$ pätee

$$I(f, [99, 100]) = 5; \quad I(f, [0, 99]) = 0; \quad I(f) = +\infty.$$

Mitallisen funktion integraali.

Lause 16 ([1, Lause 3.14]). *Olkoon $f\colon X \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen, $f \geq 0$. Tällöin on olemassa nouseva jono yksinkertaisia funktioita f_i, $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$, joille pätee $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ kaikilla $x \in X$.*

Määritelmä 17. Olkoon $f\colon X \to [0, +\infty]$ mitallinen kuvaus. Tällöin funktion f *integraali yli avaruuden* X on luku

$$\int f\,d\mu = \int_X f\,d\mu := \sup\{I(\varphi)\colon \varphi \text{ on yksinkertainen ja } \varphi \leq f\} \in [0, +\infty].$$

Jos $E \in \Gamma$, niin funktion f *integraali yli joukon* E on

$$\int_E f\,d\mu := \int_X f\chi_E\,d\mu.$$

Määritelmä 18. Mitallinen kuvaus $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ in *integroituva (joukossa E)*, jos mitallisille kuvauksille

$$f^+ := \max\{0, f\} \geq 0 \qquad \text{ja} \qquad f^- := -\min\{0, f\} \geq 0$$

on voimassa

$$\int_E f^+\,d\mu < +\infty \qquad \text{ja} \qquad \int_E f^-\,d\mu < +\infty.$$

Tällöin funktion f *integraali yli joukon* E on reaaliluku

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu.$$

Lause 19 ([1, Lause 3.36, Lause 3.43]). *Olkoon funktio $h\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja olkoot funktiot $f, g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituvia joukossa E. Tällöin*

1. *h on integroituva $\iff$ $\int_E |h|\,d\mu < +\infty$;*
2. *$|\int_E f\,d\mu| \leq \int_E |f|\,d\mu$;*
3. *$f + g$ on integroituva joukossa E ja $\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$;*
4. *λf on integroituva joukossa E ja $\int \lambda f\,d\mu = \lambda \int_E d\mu$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$;*
5. *jos $f \leq g$, niin $\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$;*
6. *jos $\mu(E) = 0$, niin $\int_E f\,d\mu = 0$;*
7. *jos $f = g$ m.k. joukossa E, niin $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$.*

Integraalin laskeminen käytännössä.

Huomio 20. Integraalien tarkkoja arvoja tarvitsee laskea reaalianalyysissa hyvin hyvin harvoin. Yleensä ollaan kiinnostuttu vain siitä, onko annettu integraali äärellinen vai ei, ja tämän selvittämiseen riittää yleensä arvioida integraalin arvoa edellisessä lauseessa listattujen ominaisuuksien avulla. Tarkkoja laskuja varten meillä on kuitenkin joitakin (melko rajallisia) tuloksia, jotka on listattu alle. Jälkimmäinen lemma tulee ajankohtaiseksi vasta tämän kurssin loppupuolella.

Lause 21 ([1, Lause 3.19]). *Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko ja $f\colon E \to \mathbb{R}$ **Lebesgue-mitallinen** funktio, $f \geq 0$. Jos f on lisäksi Riemann-integroituva yli joukon E, niin*

$$\text{(Lebesgue-integraali)} \int_E f\,dm = \int_E f(x)\,dx \quad \text{(Riemann-integraali)}$$

Lemma 22 ([2, Lemma 3.15]). *Olkoon $f\colon X \to [0, +\infty]$ mitallinen kuvaus ja olkoon $0 < p < \infty$. Tällöin*

$$\int_X f^p\,d\mu = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{x \in X\colon f(x) < t\})\,dm(t) \quad \text{(Lebesgue-integraali)}.$$

Konvergenssilauseet.

Huomio 23. Yksinkertaisesti muotoiltuna konvergenssilauseden idea on antaa helposti tarkastettava ehto sille, milloin raja-arvon ottamisen ja integroinnin järjestyksen saa vaihtaa.

Lause 24 (Monotonisen konvergenssin lause, [1, Lause 3.25]). *Olkoon $f_j\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen kuvaus jokaisella $j \in \mathbb{N}$ ja $0 \le f_1 \le f_2 \ldots$. Tällöin*

$$\lim_{j\to\infty}\left(\int_E f_j\,d\mu\right) = \int_E\left(\lim_{j\to\infty} f_j\right)d\mu.$$

Lause 25 (Fatoun lemma, [1, Lause 3.30]). *Olkoon $f_j\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen kuvaus jokaisella ja $f_j \ge 0$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\int_E\left(\liminf_{j\to\infty} f_j\right)d\mu \le \liminf_{j\to\infty}\left(\int_E f_j\,d\mu\right).$$

Lause 26 (Dominoidun konvergenssin lause, [1, Lause 3.45]). *Olkoon $f_j\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen kuvaus jokaisella $j \in \mathbb{N}$ ja olkoon $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ sellainen kuvaus, että $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ melkein kaikilla $x \in E$. Jos tällöin on olemassa sellainen integroituva kuvaus $g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$, että*

$$|f_j(x)| \le g(x) \text{ kaikilla } j \in \mathbb{N} \text{ ja melkein kaikilla } x \in E,$$

niin kuvaus f on integroituva joukossa E ja

$$\lim_{j\to\infty}\left(\int_E f_j\,d\mu\right) = \int_E f\,d\mu.$$

Fubinin lauseet Lebesguen mitalle.

Huomio 27. Fubinin lauseet kertovat, milloin kahden peräkkäisen integraalin järjestyksen saa vaihtaa. Jos funktio on ei-negatiivinen, järjestyksen saa vaihtaa melko vapaasti, mutta vaihtuvamerkkisten funktioiden kohdalla täytyy olla varovaisempi (kuten seuraavista lauseista näemme). Muotoilemme nämä lauseet juuri Lebesguen mitalle, koska tällä kurssilla kyseisiä lauseita tarvitaan juuri tällaisessa muodossa.

Lause 28 ([1, Lause 4.3]). *Olkoot $p, q \in \mathbb{N}$ ja olkoon $f\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to [0, +\infty]$ mitallinen kuvaus. Tällöin*

1) *kuvaus $y \mapsto f(x,y)$ on mitallinen m.k. $x \in \mathbb{R}^p$;*
2) *kuvaus $x \mapsto f(x,y)$ on mitallinen m.k. $y \in \mathbb{R}^q$;*
3) *kuvaukset $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y)$ ja $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x)$ ovat mitallisia;*
4) *on voimassa*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f\,dm_{p+q} &= \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y)\right)dm_p(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x)\right)dm_q(y).\end{aligned}$$

Lause 29 ([1, Lause 4.4]). *Olkoon* $f\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallinen ja oletetaan, että* ***ainakin yksi*** *integraaleista*

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} |f|\,dm_{p+q}, \quad \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dm_q(y)\right)dm_p(x), \quad \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\,dm_p(x)\right)dm_q(y)$$

on äärellinen. Tällöin

1) *kuvaus* $y \mapsto f(x,y)$ *on integroituva avaruudessa* $\mathbb{R}^q$ *melkein kaikilla* $x \in \mathbb{R}^p$*;*
2) *kuvaus* $x \mapsto f(x,y)$ *on integroituva avaruudessa* $\mathbb{R}^p$ *melkein kaikilla* $y \in \mathbb{R}^q$*;*
3) *kuvaukset* $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y)$ *ja* $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x)$ *ovat integroituvia;*
4) *kuvaus* f *on integroituva avaruudessa* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ *ja*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f\,dm_{p+q} &= \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y)\right)dm_p(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x)\right)dm_q(y).\end{aligned}$$

Huomio 30. Fubinin lauseet ovat voimassa myös monille muille mitoille, mutta lauseiden yleisempien muotoilujen ymmärtäminen vaatii käsitteitä, jotka eivät kuulu tämän kurssin aihealueeseen. Kiinnostuneet voivat kuitenkin lukea asiasta esimerkiksi lähteestä [3, Theorem 8.8].

Viitteet

[1] Ilkka Holopainen. Mitta ja integraali (kurssimateriaali). 2004.
[2] Ilkka Holopainen. Reaalianalyysi I (kurssimateriaali). 2012.
[3] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.