Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Erilliskoe
12.5.2015

1. Muotoile ja todista L^p-avaruuksien Hölderin epäyhtälö.

2. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva, kompaktikantajainen funktio. Osoita, että konvoluutio $f*g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva.

3. (a) Määrittele mitallisen joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ tiheyspiste.

(b) Onko olemassa sellaista positiivimittaista joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$, että

$$\frac{1}{3}m\big(B(x,r)\big) \le m\big(A \cap B(x,r)\big) \le \frac{2}{3}m\big(B(x,r)\big)$$

melkein kaikilla $x \in A$ ja kaikilla $r \in (0, r_x)$? Tässä $B(x,r)$ on avoin x-keskinen, r-säteinen kuula ja luku $r_x > 0$ voi riippua pisteestä x. Perustele vastauksesi!

4. (a) Anna Hardy-Littlewood maksimaalifunktion Mf määritelmä, kun $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on lokaalisti integroituva funktio.

(b) Muotoile Hardy-Littlewoodin lause avaruuden $L^1(\mathbb{R}^n)$ funktioille.

(c) Hardy-Littlewoodin lauseen todistus perustuu erääseen peitelauseeseen. Muotoile tämä lause.

[Huom.: Kohtien (b) ja (c) lauseita ei tarvitse todistaa.]

5. Olkoon $f\colon [0,1] \to [0,2]$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2\big(1 + \sin(1/x)\big), & \text{jos } 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

ja $g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

(a) Osoita, että f ja g ovat absoluuttisesti jatkuvia.

(b) Osoita, ettei $g \circ f$ ole rajoitetusti heilahteleva.

Svenskspråkig version på motstående sida!

Institutionen för matematik och statistik
Reell analys I
Slutförhör
12.5.2015

1. Formulera och bevisa Hölders olikhet för L^p-rummen.

2. Låt $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ och låt $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion med kompakt stöd. Visa att konvolutionen $f * g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerlig.

3. (a) Definiera begreppet täthetspunkt för en mätbar mängd $A \subset \mathbb{R}^n$.

(b) Finns det en sådan mängd $A \subset \mathbb{R}^n$ som har positivt mått, för vilken

$$\frac{1}{3} m\big(B(x,r)\big) \le m\big(A \cap B(x,r)\big) \le \frac{2}{3} m\big(B(x,r)\big)$$

för nästan alla $x \in A$ och alla $r \in (0, r_x)$? Här är $B(x,r)$ den öppna kulan med mittpunkten x, radien r och talet $r_x > 0$ kan bero på punkten x. Motivera ditt svar!

4. (a) Ge definitionen av Hardy-Littlewoods maximalfunktion Mf, då $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ är en lokalt integrerbar funktion.

(b) Formulera Hardy-Littlewoods sats för funktioner i rummet $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(c) Beviset av Hardy-Littlewoods sats baserar sig på en viss övertäckningssats. Formulera denna sats.

[Obs.: Satserna i delarna (b) och (c) behöver inte bevisas.]

5. Låt $f \colon [0,1] \to [0,2]$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2\big(1 + \sin(1/x)\big), & \text{om } 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{om } x = 0, \end{cases}$$

och $g \colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

(a) Visa att f och g är absolut kontinuerliga.

(b) Visa att $g \circ f$ inte är av begränsad variation.

Suomenkielinen versio kääntöpuolella!