Reaalianalyysi I erilliskoe 12.5.2015

Mallivastauksia ja kommentteja (korjaaja: Hans-Olav Tylli)

1) Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Hölderin epäyhtälö: jos $f \in L^p(X)$ ja $g \in L^q(X)$, niin

(H) $$\int_X |f(x) g(x)| \, d\mu \leq \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Tod Youngin epäyhtälö: jos $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ ja $\alpha + \beta = 1$, niin

(Y) $$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b \quad \text{kaikilla } a, b \geq 0.$$

$\boxed{\text{ei tarvitse todistaa}}$

Olkoon $x \in X$. Valitaan (Y):ssä $a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}$, $b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$, $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$ $\Rightarrow$

$$\frac{|f(x) g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} = \left(\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

integroidaan yli X $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_X |f(x) g(x)| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\int_X |f(x)|^p \, d\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int_X |g(x)|^q \, d\mu}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Kerrotaan luvulla $\|f\|_p \cdot \|g\|_q > 0$ $\Rightarrow$ epäyhtälö (H)

"Lisäksi": jos $\|f\|_p = 0$ tai $\|g\|_q = 0$ $\Rightarrow$ (H) selvä

---

2. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva kompaktikantajainen funktio.

Väite konvoluutio $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä

Tod jos $x \in \mathbb{R}^n$, niin (merkitään $dy = dm_n(y)$ Lebesguen mitta)

(*) $$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, dy \underset{\substack{\text{translaatio-} \\ \text{invarianssi}}}{\overset{\text{sij. } x-y=z}{=}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(x-z) \, dz$$

g jatkuva kompaktikantajainen $\Rightarrow$ g on tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä

(syy: $K = \overline{\{x : g(x) \neq 0\}}$ kompakti $\mathbb{R}^n$:ssä, $g(x) \equiv 0$ kun $x \notin K$)

Olkoon $\varepsilon > 0$ mv $\overset{\text{tas. jva}}{\Longrightarrow}$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.e.

(**) $$|g(u) - g(v)| < \varepsilon \quad \text{aina kun } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ ja } |u - v| < \delta.$$

olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ mielivaltainen, ja $h \in \mathbb{R}^n$ s.e. $|h| < \delta$.

$$|f*g(x+h) - f*g(x)| \overset{(*)}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, g(x+h-z)\,dz - \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, g(x-z)\,dz \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \big(g(x+h-z) - g(x-z) \big)\, dz \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|\, \underbrace{|g(x+h-z) - g(x-z)|}_{< \varepsilon \ \forall z \in \mathbb{R}^n}\, dz$$

koska $|x+h-z-(x-z)| = |h| < \delta$

$$\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|\,dz = \varepsilon \|f\|_1$$

$\overset{\text{määr.}}{\Longrightarrow}$ $f*g$ tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä

Kommentti Seuraava vaikeampi fakta on myös voimassa (tätä ei tarkoitettu tehtävässä!)

jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja rajoitettu $\mathbb{R}^n$:ssa, niin $f*g$ on tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssa. Nimittäin: jos $x \in \mathbb{R}^n$, niin

$$|f*g(x+h) - f*g(x)| \underset{\text{1. osa}}{\overset{(*)}{=}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x+h-y) - f(x-y)\big)\, g(y)\,dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h-y) - f(x-y)| \cdot \underbrace{|g(y)|}_{\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)| \equiv M < \infty} dy \leq M \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h-y) - f(x-y)|\,dy$$

$$\overset{\text{sij. } x-y=z}{=} M \int_{\mathbb{R}^n} |f(z+h) - f(z)|\,dz = M \cdot \|\tau_h f - f\|_{L^1} \xrightarrow[h \to 0]{\text{Lause 2.29}} 0,$$

missä $\tau_h f(x) = f(x+h)$, kun $x \in \mathbb{R}^n$ ja $h \in \mathbb{R}^n$.

3. (a) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $x \in \mathbb{R}^n$. x on A:n tiheyspiste jos

$$\lim_{r \to 0+} \frac{m(A \cap B(x,r))}{m(B(x,r))} = 1$$

$\boxed{m(\cdot) = \text{Lebesguen } n\text{-ulotteinen mitta}}$

(2p).

(b) Väite Ei ole olemassa mitallista joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $m(A) > 0$ ja

(*) $$\frac{1}{3} m(B(x,r)) \leq m(A \cap B(x,r)) \leq \frac{2}{3} m(B(x,r)) \quad \forall\, 0 < r < r_x \text{ ja m.k. } x \in A.$$

Nimittäin: (*) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{m(A \cap B(x,r))}{m(B(x,r))} \leq \frac{2}{3} \quad \text{kun} \quad 0 < r < r_x ,$$

joten

$$\frac{1}{3} \leq \lim_{r \to 0+} \frac{m(A \cap B(x,r))}{m(B(x,r))} \leq \frac{2}{3} \quad \text{jos raja-arvo olemassa m.k. } x \in A.$$

Toisaalta: Lebesguen differentioituvuuslause 3.28 (tai Seuraus 3.33) $\Rightarrow$

$$\lim_{r \to 0+} \frac{m(A \cap B(x,r))}{m(B(x,r))} = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \chi_A(y)\,dy = \chi_A(x) = 1 \quad \text{m.k. } x \in A$$

(χ_A = A:n karakteristinen funktio).

Koska $m(A) > 0$ ylläolevat seikat ovat ristiriidassa toistensa kanssa (4 p.).

Kommentti: Sama argumentti $\Rightarrow$ ei ole mitallista osajoukkoa $B \subset A$ s.e. $m(B) > 0$ ja (*) voimassa kun $x \in B$.

---

④ (a) Olkoon $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ lokaalisti integroituva ja $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\,dy = \sup_{B \ni x} ⨍ |f(y)|\,dy$$

missä supremum otetaan yli avoimet kuulat $B \subset \mathbb{R}^n$ joille $x \in B$. (2p.)

Varoitus itseisarvo $|f(y)|$ keskiarvointegraalissa ($\Rightarrow$ $Mf(x) \geq 0$ aina)

(b) Hardy-Littlewoodin lause (Lause 3.22) jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{5^n}{t} \|f\|_1 \quad \text{kaikille} \quad t > 0$$

(2p)

Kommentti versio

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{c}{t} \cdot \|f\|_1 \quad \forall t > 0$$

riittää myös (vakio $c = 5^n$ ei ole olennainen kurssin kannalta).

(c) Hardy-Littlewoodin lauseen todistus perustuu seuraavaan peitelauseeseen

<u>Peruspeitelause 3.3</u> Olkoon $\mathcal{F}$ mielivaltainen perhe $\mathbb{R}^n$:n (avoimia tai suljettuja) kuulia s.e.

$$\sup_{B\in\mathcal{F}} d(B) < \infty \quad \text{(ts. kuulien koko ylhäältä rajoitettu!)}$$

missä $d(B) =$ B:n halkaisija $(= \sup\{|x-y| : x,y\in B\})$.

Tällöin on olemassa <u>numeroituva</u> osaperhe $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$, s.e. $\mathcal{G}$ koostuu <u>erillisistä</u> kuulista (eli jos $B, B'\in\mathcal{G}$ ja $B\neq B' \Rightarrow B\cap B' = \emptyset$) <u>ja</u>

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5\cdot B$$

eli kuulat $5\cdot B$, $B\in\mathcal{G}$, peittävät saman joukon kuin alkuperäinen perhe $\mathcal{F}$.

Edellä $5\cdot B = B(x,5r)$ jos $B = B(x,r)$ avoin kuula (vastaavasti suljetuille kuulille). (2p)

<u>Varoitus</u> Vitalin peitelause (3.9) <u>ei</u> sovellu Hardy-Littlewoodin lauseen todistukseen, koska ehto $Mf(x) > t$ <u>ei</u> välttämättä ($\equiv$ ei RAI:n argumenteilla) takaa, että on olemassa mielivaltaisen <u>pieniä</u> kuulia $B_x \ni x$ joille

$$\frac{1}{m(B_x)}\int_{B_x} |f(y)|\,dy > t \quad \text{(Vitali peitteen ehto).}$$

---

(5) (a) $g(x) = \sqrt{x}$, $x\in[0,2]$.

g on absoluuttisesti jatkuva, koska $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ kun $t>0$,

g' on integroituva ja

$$\int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{x} \quad \text{kun } x\in[0,2] \qquad \text{(Lause 3.78)}$$

olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 + x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \overset{\text{määr.}}{\equiv} h_1(x) + h_2(x), \quad x\in(0,1]$$

(Helppo) <u>Fakta</u> h_1 ja h_2 abs. jatkuvia $\Rightarrow$ h_1+h_2 absoluuttisesti jatkuva (syy: Δ-epäyhtälö)

$h_1(x) = x^2$ absoluuttisesti jatkuva koska $h_1'(x) = 2x$ (Lause 3.78)

olkoon
$$h_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Väite h_2 on absoluuttisesti jatkuva välillä $[0,1]$.

Tod. (Lauseen 3.78 avulla taas)

jos $x > 0$: $h_2'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$h_2'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0+} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0 \quad \left(\text{koska } \left|\sin\left(\tfrac{1}{h}\right)\right| \le 1 \text{ aina}\right)$$

$\Rightarrow$ h_2' on integroituva koska $\left|2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 2x$ ja $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$ kun $0 < x \le 1$.

Lisäksi
$$x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^x h_2'(t)\,dt \quad \text{kun } x > 0.$$

Lause 3.78 $\Rightarrow$ h_2 on absoluuttisesti jatkuva välillä $[0,1]$. (osa (a) = 3p).

(b)
$$g\circ f(x) = \begin{cases} x\cdot\sqrt{1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}, & \text{jos } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

Väite $g\circ f$ ei ole rajoitetusti heilahteleva välillä $[0,1]$.

Tod olkoon $x_{2k} = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ $g\circ f(x_{2k}) = \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\underbrace{\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}} = \frac{\sqrt{2}}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$

$x_{2k+1} = \frac{1}{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ $g\circ f(x_{2k+1}) = \frac{1}{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}\sqrt{1+\underbrace{\sin\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1}} = 0$

Määritelmän nojalla kokonaisheilahtelu $V_{g\circ f}(0,1)$ toteuttaa $\forall n$ ehdon

$$V_{g\circ f}(0,1) \overset{\sup}{\ge} \sum_{k=0}^{n} \left|g\circ f(x_{2k}) - \underbrace{(g\circ f)(x_{2k+1})}_{=0}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi+\frac{\pi}{2}} \ge \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$\{x_{2n+1}, x_{2n}, \dots, x_1\}$ eräs jako

koska harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ hajaantuu. Siis $g\circ f$ ei rajoitetusti heilahteleva. (osa (b) 3p.)

Kommentti: $x \mapsto 1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ei ole rajoitetusti heilahteleva (HT), joten

(a)-kohdassa $x \mapsto f(x) = x^2\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ei voida käsitellä tulofunktiona