Moniulotteiset aikasarjat kl 2015, HT 3, viikko 6

1. Tarkastellaan kaksiulotteista VAR(p)-prosessia

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} a_{11,j} & a_{12,j} \\ a_{21,j} & a_{22,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-j} \\ y_{2,t-j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

tai lyhyesti

$$A(\mathsf{B})\, y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\,(0, \Omega)\,,$$

jossa

$$A(\mathsf{B}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathsf{B}) & a_{12}(\mathsf{B}) \\ a_{21}(\mathsf{B}) & a_{22}(\mathsf{B}) \end{bmatrix}$$

toteuttaa monisteen stationaarisuusehdon (2.13) det $A(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$ (ks. s. 10). Esitä riittävä ehto sille, että polynomit $a_{11}(z)$ ja $a_{22}(z)$ toteuttavat tavanomaisen AR(p)-prosessin stationaarisuusehdon $a_{ii}(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$ $(i = 1, 2)$. Osoita lisäksi esimerkillä, että ehdot $a_{11}(z) \neq 0$ ja $a_{22}(z) \neq 0$ $(|z| \leq 1,\ i = 1, 2)$ tai ainakin toinen niistä voi rikkoontua, vaikka monisteen stationaarisuusehto (2.13) pätisikin.

2. Olkoon Y reaaliarvoinen satunnaismuuttuja ja $\tilde{Y} = g(X)$ jokin sen satunnaisvektoriin X perustuva ennuste. Osoita oikeaksi tulos

$$\mathsf{MSE}(\tilde{Y}) \geq \mathsf{MSE}\,(\mathsf{E}\,(Y|X))\,,$$

jossa $\mathsf{MSE}\,(\cdot)$ on määritelty monisteen sivulla 14.

3. (Jatkoa edelliselle) Olkoot Y ja $\tilde{Y} = g(X)$ nyt vektoriarvoisia. Osoita oikeaksi monisteen s. 14 mainittu tulos

$$a'\mathsf{MSE}(\tilde{Y})a \geq a'\mathsf{MSE}\,(\mathsf{E}\,(Y|X))\,a$$

kaikilla dimensioltaan sopivilla vektoreilla a.

Vihje: Voit siirtyä tarkastelemaan lineaarikombinaatioita $a'Y$ ja $a'\tilde{Y}$ ja olennaisesti palauttaa tilanteen yksiulotteiseksi.

4. Perustele monisteen liitteen s. 5 esitetty tulos, jonka mukaan polynomi $p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ voidaan kirjoittaa

$$p(z) = p(1) + (1 - z)\, q(z)\,,$$

jossa

$$q(z) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k z^k, \quad b_k = -\sum_{j=k+1}^{m} a_j.$$

Huom.: Tulos yleistyy potenssisarjoille (eli tapaukseen $m = \infty$), kunhan tuloksessa esiintyvät potenssisarjat ovat hyvin määriteltyjä, minkä takaa monisteen liitteessä A.4 mainittu ehto $\sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_k| < \infty$. Yleistykset edelleen matriisitapaukseen ovat suoraviivaisia ja niistä saadaan monisteen s. 19 käytetty tulos $\Psi(\mathsf{B}) = \Psi(1) + \Delta G(\mathsf{B})$.

Vihje: Yksi tapa ratkaista tehtävä perustuu siihen, että kaksi polynomia ovat samat, jos niiden kertoimet ovat samat.