

Moniulotteiset aikasarjat kl 2015, HT 2, viikko 5

1. Olkoon matriisi \mathbf{A} kuten HT:ssä 1.4 (tai monisteen s. 8). Osoita (determinanttiin perustuvan ominaisarvoyhtälön ja determinantin ominaisuuksien avulla), että \mathbf{A} :n kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä jos ja vain jos monisteen ehto (2.9) pätee eli

$$\det(I_{np} - \mathbf{A}z) \neq 0, \quad |z| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Vihje: Yksi tapa todeta ekvivalenssi tapauksessa, jossa \mathbf{A} :n kaikki ominaisarvot oletetaan ykköstä pienemmiksi, perustuu vastaoletukseen.

2. Osoita HT:n 1.4 tuloksen avulla, että monisteen ehdot (2.9) ja (2.13) ovat yhtäpitäviä.

Vihje: Yksi tapa todeta ekvivalenssi on lähteä ensin oletuksesta, että (2.13) pätee ja sitten oletuksesta, että (2.13) ei päde.

3. Oletetaan, että $n \times n$ matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ovat erisuuria ja itseisarvoltaan ykköstä pienempiä eli $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$. Osoita HT:ää 1.3 (ja sen ratkaisua) käyttäen, että tällöin sarjat $\sum_{j=0}^{\infty} A^j$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} \|A^j\|$ suppenevat ja lisäksi, että $\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I_n - A)^{-1}$.

Huom.: Kun suppeneminen on todettu, voidaan tulos $\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I_n - A)^{-1}$ todeta helposti myös ilman oletusta ominaisarvojen erisuuruudesta. Suppeneminen voidaan puolestaan todeta ilman tätä oletusta käyttäen matriisin A Jordanin hajotelmaa (ks. Liite A.2), mutta perustelusta tulee jonkin verran hankalampi. Kompleksiset ominaisarvot ja vektorit eivät aiheuta hankaluuksia, sillä niissä laskelmat sujuvat kuten reaalisessa tapauksessakin (yksi vaihtoehto on tarkastella reaali- ja imaginaariosia erikseen).

4. Ratkaise monisteen s. 12 johdetuista Yule-Walker -yhtälöistä

$$\Gamma'_k = A_1 \Gamma'_{k-1} + \dots + A_p \Gamma'_{k-p}, \quad k > 0,$$

kerroinmatriisit A_1, \dots, A_p kovarianssimatriisien $\Gamma'_0, \dots, \Gamma'_p$ funktiona. Ratkaisussa voit olettaa, että tarvittava matriisin kääntäminen on mahdollinen eli kyseinen matriisi voidaan osoittaa epäsingulaariseksi.