Moniulotteiset aikasarjat kl 2015, HT 1, viikko 4

1. Olkoon $A = [a_{ij}]$ $n \times m$ matriisi ja $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$ sen normi (ks. Liite A.1). Osoita, että

(i) $\max |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \sqrt{nm} \max |a_{ij}|$, jossa maksimit ovat yli arvojen $i = 1, ..., n$ ja $j = 1, ..., m$.

(ii) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$, kun B on $m \times l$ matriisi.

(iii) $A_N \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} A$ alkioittain eli $a_{ij,N} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} a_{ij}$ kaikilla $i = 1, ..., n$ ja $j = 1, ..., m$ jos ja vain jos $\|A_N - A\| \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$ (tässä $A_N = [a_{ij,N}]$ on jono $n \times m$ matriiseja).

Vihje: Kohdassa (ii) voi kirjoittaa $C = AB$ ja käyttää matriisitulon määritelmää sekä vektorien Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä. Kohdassa (iii) voi käyttää kohdan (i) tulosta.

2. Oletetaan, että $n \times n$ matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ovat erisuuria (ks. Liite A.2). Oletetaan matriisilaskennasta lisäksi tunnetuksi, että vastaavat ominaisvektorit ovat tällöin lineaarisesti riippumattomat (eli vapaat).

Osoita, että matriisi A voidaan lausua muodossa $A = P\Lambda P^{-1}$, jossa $\Lambda = \mathsf{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ (diagonaalimatriisi) ja matriisin P $(n \times n)$ sarakkeet ovat A:n (lineaarisesti riippumattomat) ominaisvektorit. Totea tämän perusteella, että $A^N = P\Lambda^N P^{-1}$.

Vihje: Yhtälö $A = P\Lambda P^{-1}$ voidaan johtaa kirjoittamalla Liitteen A.2 rivillä 3 olevat yhtälöt matriisimuodossa.

3. (Jatkoa edelliselle). Olkoon $n \times n$ matriisi A kuten edellisessä tehtävässä. Oletetaan, että A:n kaikki (erisuuret) ominaisarvot $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä eli $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, ..., n$. Osoita , että tällöin $A^N \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$ geometrisesti eli matriisin A^N alkioille $\left[A^N\right]_{ij}$ pätee $\left|\left[A^N\right]_{ij}\right| \leq Cr^N$, jossa $C < \infty$ ja $r < 1$.

Vihje: Tarkastele matriisin A^N normia $\left\|A^N\right\|$ ja johda sille "sopiva" yläraja.

Huom.: Tehtävän tulos pätee myös ilman oletusta matriisin A ominaisarvojen erisuuruudesta. Tällöin edellisen tehtävän hajotelman asemesta käytetään A:n Jordanin hajotelmaa (ks. Liite A.2). Tämän ja tehtävän 1(i) jälkimmäisen epäyhtälön avulla voidaan perustella monisteen s. 9 esitetty epäyhtälö $\sum_{j=0}^{\infty} \left\|\boldsymbol{A}^j\right\|^2 < \infty$.

4. Tarkastellaan matriisia (ks. moniste s. 8)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{p-1} & A_p \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \qquad (np \times np)\,,$$

jossa A_i on $n \times n$ matriisi $(i = 1, ..., p)$. Olkoon $\lambda \neq 0$ matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvo, jolloin siis $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$, jossa $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1' & \cdots & x_p' \end{bmatrix}' \neq 0$ on λ:aa vastaava ominaisvektori

(x_i on $n \times 1$ vektori). Osoita, että yhtälö $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ on yhtäpitävä determinanttiyhtälön $\det\left(I_n - \sum_{j=1}^{p} \lambda^{-j} A_j\right) = 0$ kanssa.

Vihje: Tarkastele yhtälöä $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ ja suorita vasemmalla kertolasku käyttäen ositettujen matriisien kertolaskukaavaa (ks. Liite A.5), minkä jälkeen voit johtaa mainitun determinanttiyhtälön.