Mitta ja Integraali
Kevät 2015
7. tehtävät

> There is no sense in being precise, when you don't even know what you're talking about.
>
> -John von Neumann

Nämä viimeiset harjoitukset palautetaan tarkastettavaksi viimeistään 6.3 ja oikeat vastaukset opiskellaan omatoimisesti malleista. Huom. Viimeinen ilmoittautumispäivä ensimmäiseen tenttimahdollisuuteen on 4.3.

Konvergenssilauseet, ennen kaikkea, ovat tuloksia joita tulette tarvitsemaan myöhemmillä kursseilla. Niitä siis kannattaa opetella käyttämään.

Tehtävä 1 *Olkoon $0 < s < 1$. Osoita, että voit käyttää MKL:ää laskemaan raja-arvon*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}$$

ja laske se.

Tehtävä 2 (Integraali mittana) *Osoita Lauseen 4.24 kohta (ii): jos $f \geq 0$ on mitallinen ja joukot E_j mitallisia ja* erillisiä, *niin*

$$\int_{\cup_{j=1}^{\infty} E_j} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f.$$

[Tämä siis todistaa, että kuvaus $E \mapsto \int_E f$ toteuttaa mitan aksiomat.]

Tehtävä 3 (Laskevan konvergenssin lause) *Olkoon meillä laskeva jono positiivisia mitallisia funktioita $f_1 \geq f_2 \geq \ldots$ siten, että $\int f_1 < \infty$. Osoita, että voimme vaihtaa rajankäynnin ja integroinnin järjestyksen:*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{1}$$

Vapaaehtoinen lisäkysymys: osaatko antaa vastaesimerkin väitteelle tapauksessa $\int f_1 = \infty$?

(Vihje:[1])

Tehtävä 4 *Olkoon A_n, $n = 1, 2, \ldots$ jono mitallisia joukkoja. Käytä Fatoun Lemmaa osoittamaan*

$$m(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n m(A_n). \tag{2}$$

[Fatoun Lemma itseasiassa todistettiin käyttäen tätä tulosta valinnoilla $A_n := \mathcal{G}(f_n)$. Joten tämä tehtävä osoittaa, että Fatou on yhtäpitävä kyseisen mittateoreettisen faktan kanssa.]

(Vihje: [2])

[1] Voit joko soveltaa MKL:ää tai vaihtoehtoisesti käyttää puhtaasti mittateoreettista tulosta Lause 1.63.

[2] Sovella esitystä $m(E) = \int \chi_E$.

Tehtävä 5 *Perustele miksi saat käyttää DKL:ää laskemaan raja-arvon*

$$\lim_{k\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{x^2+(-\frac{1}{2})^k}\,dx \tag{3}$$

ja laske se.

Tehtävä 6 *Laske*

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+e^{k(x-1)}}}\,dx. \tag{4}$$

(Hajoita integraali kahteen osaan $\int_0^1 + \int_1^\infty$ *ja käytä sopivia konvergenssilauseita.)*

Tehtävä 7 (Bonustehtävä 1) *Käytä DKL:ää (sanomattakin selvää, että perustele miksi voit käyttää sitä) laskemaan raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin^2(x^n)}{x^{2n-2}}. \tag{5}$$

(Vinkkejä:[3] *)*

Tehtävä 8 (Bonustehtävä 2) *Olkoon* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *integroituva. Osoita, että funktio* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(xt)\,dt, \tag{6}$$

on jatkuva.

Vihje:[4]

[3] Kannattaa taas jakaa integraali kahteen osaan $\int_0^1 + \int_1^\infty$. Käytä arviota $\sin(x) \le x$ kaikilla $x \ge 0$ ja raja-arvoa $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x = 1$.

[4] Muistutus: Esim. jatkuvuus pisteessä x, eli $\lim_{y\to x} g(y) = g(x)$, pätee jos ja vain jos $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(x)$ mielivaltaisella jonolla $y_n \to x$. Tätä kautta pääset käyttämään jonoja ja konvergenssilauseita.

[Lisätieto: Tämä tehtävä osoittaa, että integroituvan funktion Fourier muunnos $\hat{f}$ on jatkuva.]