Mitta ja Integraali
Kevät 2015
6. tehtävät

> Mathematics reveals its Secrets only to those who approach it with pure Love, for its own Beauty.
>
> -Archimedes

Lukuunottamatta ensimmäistä, nämä tehtävät liittyvät materiaalin sivuihin 61-65. Ne valmistavat teknisesti oppilasta integrointiteorian tärkeimpiin konvergenssituloksiin, joita käsitellään viimeisellä viikolla.

Tehtävä 1 (Mitallisten funktioiden tulo on mitallinen) *Olkoon* $f, g : A \to \dot{R}$ *mitallisia. Osoita, että tulo* $f \cdot g : A \to \dot{R}$, $x\ mapsto f(x)g(x)$ *on mitallinen.*

(Imitoi Lauseen 2.11 todistuksen alkuosaa tulkitsemalla tulo mitallisen ja jatkuvan kuvauksen yhdisteenä. Tässä tehtävässä oletamme funktiot äärellisiksi, joten vältymme Lauseen 2.11 loppuosan monimutkaisuuksilta.)

Tehtävä 2 ($\limsup$- ja $\liminf$-harjoitus) *Laske* $\limsup_n a_n$ *ja* $\liminf_n a_n$ *kun*

A) $a_n = (-1)^n$

B) $a_n = \cos(a_n)$, *missä* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *on rationaalilukujen numerointi.*

C) Todista myös kaava

$$\liminf_n -a_n = -\limsup_n a_n. \tag{1}$$

Tehtävä 3 *Olkoon* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ja* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *reaalilukujonoja. Todista epäyhtälö*

$$\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n. \tag{2}$$

Anna esimerkki jonoista, joilla epäyhtälö on aito. (Älä etsi liian monimutkaista.)

(Vihje: Aloita osoittamalla $\sup_{k \geq n}(a_k + b_k) \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$*.)*

Seuraavat tehtävät osoittavat, miten hyvin funktion mitallisuus säilyy ja toimii raja-arvojen kanssa. Tämäkin ilmiö on pohjimmiltaan seurausta Lebesgue joukkojen sigma-algebrallisuudesta.

Tehtävä 4 *Osoita mitallisen funktion karakterisaatiolausetta 2.2 käyttäen [et siis saa suoraan vedota Lauseeseen 4.9], että jos funktiot* f_n *ovat mitallisia, niin* $\inf_n f_n$ *on mitallinen.*

(Vihje: Lue Lauseen 4.9 todistus ja käytä luovuuttasi.)

Tehtävä 5 *Olkoot* $f_1, f_2, \ldots$ *jono mitallisia funktioita* $A \to \mathbb{R}$, *missä* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Osoita, että joukko* $B = \{x \in A : \lim_{j \to \infty} f_j(x)$ *on olemassa*$\}$ *on mitallinen.*

(Vihje: Käytä Lausetta 4.7 sekä lausetta 4.9. Todistus on noin kaksi riviä, jos sen lyhyesti kirjoittaa.)

Tehtävä 6 *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$, *mitallinen ja* $f_j : A \to \mathbb{R}$ $j \in \mathbb{N}$, *jono mitallisia funktioita. Osoita, että joukot*

$$A_j = \{x \in A : f_{j+1}(x) \geq f_j(x)\}$$

ovat mitallisia.

Osoita edellisen avulla, että joukko

$$\{x \in A : \text{ jono } (f_j(x))_{j=1}^{\infty} \text{ on kasvava}\}$$

on mitallinen.

(Vihje: Jono $f_j(x)$ *on kasvava pisteessä* x *jos* $f_{j+1}(x) \geq f_j(x)$ *kaikilla* j. *Käännä tämä "joukkojen kielelle".)*