Mitta ja Integraali
Kevät 2015
5. tehtävät

> Study hard what interests you, in the most undisciplined, irreverent, and original manner possible.
>
> -Richard Feynmann

Tehtävät koskevat materiaalia sivulle 47 asti.

Tehtävä 1 (Ei mitallinen joukko ja aito subadditiivisuus) *Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ ei-mitallinen joukko (tällainen löytyy Lauseen 1.71 perusteella). Osoita, että on olemassa kaksi ERILLISTÄ joukkoa A_1 ja A_2 siten, että*

$$m^*(A_1 \cup A_2) < m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

Eli ulkomitta ei ole edes äärellisen täysadditiivinen. (Lebesgue-mitan täysadditiivisuudesta muuten seuraa, että joukot A_i eivät ole mitallisia.)

(Vihje: Katso Lebesgue-mitallisen joukon määritelmää eli Caratheodoryn ehtoa.)

Tehtävä 2 (Harjoitus funktion mitallisuudesta) *Määritellään kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) = x^2$, kun $x \in \mathbb{Q}$, ja $f(x) = 1$, kun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Osoita, että f on mitallinen.*

(Tässä ei kannata rasittaa sormia pyörittelemällä määritelmiä. Esitä f summana kahdesta helpommasta funktiosta ja käytä Lausetta 2.11.)

Tehtävä 3 (Mitallisen funktion karakterisaatio) *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että joukko $\{x \in A : f(x) \leq q\}$ on mitallinen kaikilla $q \in \mathbb{Q}$. Osoita, että A on mitallinen joukko ja f on mitallinen funktio.*

(Vihje: Lause 2.2 ja sen todistuksen ideat tulevat tässä hyvään tarpeeseen.)

Tehtävä 4 (Mitan jatkuvuus ja Täysadditiivisuus) *Tämän tehtävän tarkoitus on osoittaa, yhdessä materiaalin Lauseen 1.62 kanssa, että joukkofunktion täysadditiivisuus on "sama asia" kuin sen "jatkuvuus nousevien joukkojonojen suhteen". Tämä tieto on teoreettisesti mielenkiintoinen ja todistus erinomaista käsiteharjoitusta.*

Oletetaan, että $\Gamma \subset P(X)$ sigma-algebra ja $\mu : \Gamma \to [0, \infty]$ sellainen funktio jolla on seuraavat kolme ominaisuutta:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Äärellinen täysadditiivisuus: Jos $A_1, A_2, \ldots A_k$ erillisiä, niin $\mu(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i)$.

iii) Kaikille nouseville joukkojonoille $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, missä $A_n \in \Gamma\ \forall n \in \mathbb{N}$, pätee

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Osoita, että tällöin μ on mitta (katso materiaalin Määritelmä 1.51). (Vihje: [1])

Tehtävä 5 (Joukkojonon tyhjenevyys ja mitan jatkuvuus) *Tämä tehtävä jatkaa edellisen hengessä.*

Oletetaan, että $\Gamma \subset P(X)$ sigma-algebra ja $\mu : \Gamma \to [0, \infty]$ on sellainen joukkofunktio jolla on seuraavat kolme ominaisuutta:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Äärellinen täysadditiivisuus: Jos $A_1, A_2, \ldots A_k$ erillisiä, niin $\mu(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i)$.

iii) Jos joukot $A_n \in \Gamma$ $\forall n \in \mathbb{N}$ muodostavat laskevan jonon $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \searrow \emptyset$ (tarkoittaa: $\bigcap_n A_n = \emptyset$), niin silloin pätee

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Osoita, että tällöin μ toteuttaa edellisen tehtävän ehdon iii), mistä seuraa, että μ on mitta. (Vihje: [2])

Tehtävä 6 (Harjoitus funktion mitallisuuteen) *Sanotaan että funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kasvava jos $g(x) \leq g(y)$ aina kun $x \leq y$. Osoita, että kasvava funktio on mitallinen.*

(Vihje: Käytä jälleen Lausetta 2.2)

[1] Tämä ei ole pitkä tehtävä. Jos $E_1, E_2, \ldots \in \Gamma$ ovat erillisiä niin kokeile nousevaa joukkojonoa $B_n := \bigcup_{k=1}^n E_k$. Inspiraatiota voi myös hakea Lauseen 1.62 todistuksesta.

[2] Tutki joukkojonoa $C_n := \bigcup_k A_k \setminus A_n$. Jos jono A_n on nouseva, niin jono C_n on laskeva. Ole tarkkana äärettömyyksien kanssa. Käytä hajotelmaa $\bigcup_k A_k = A_n \cup C_n$. Lue myös materiaalin Lauseen 1.63 todistus.