Mitta ja Integraali
Kevät 2015
4. tehtävät

Everything should be made as simple as possible. But no simpler!
-A, Einstein

Tehtävät käsittelevät materiaalia sivulle 39 asti pois lukien Hausdorffin mitta -kappale.

Kolmen ensimmäisen tehtävän tarkoituksena on opettaa miten sekä mitallisia, että ei-mitallisia joukkoja voidaan approksimoida avoimilla, suljetuilla tai mitallisilla joukoilla.

Tehtävä 1 (Approksimointi ulkoa avoimella joukolla) *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen joukko. Osoita, että kaikilla ε on olemassa avoin joukko $G_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset G_\varepsilon$ ja*

$$m(G_\varepsilon) \leq m^*(A) + \varepsilon$$

(Vihje alaviitteessä: [1])

Tehtävä 2 (Approksimointi ulkoa mitallisella joukolla) *Jatkoa edelliselle tehtävälle.*

A) Osoita nyt edellistä tehtävää apuna käyttäen, että on olemassa (mitallinen) $\mathcal{G}_\delta$-joukko (eli numeroituva leikkaus avoimista) $B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että

$$A \subset B \quad ja \quad m(B) = m^*(A)$$

B) Olkoon A nyt mitallinen joukko ja lisäksi $m(A) < \infty$. Osoita tehtävän 1 avulla, että kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin joukko G siten, että $A \subset G$ ja

$$m(G \setminus A) < \varepsilon.$$

(Vihje: [2])

Tehtävä 3 (Mitallisen joukon kuristus avoimen ja suljetun joukon väliin.) *Jatkoa tehtäville 1 ja 2:*

A) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ vain mitallinen. Merkataan $A_m = A \cap B(0, m)$. Olkoon G_m avoin siten että $A_m \subset G_m$ ja olkoon $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$. Osoita, että

$$G \setminus A \subset \bigcup_{m=1} (G_m \setminus A_m).$$

Valitsemalla G_m sopivasti osoita että kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa G siten, että $m(G \setminus A) < \epsilon$.

[1] Tutki ulkomitan ja Lebesguen peitteen määritelmää.

[2] Alkuosa: valitse jokaista $\varepsilon_n := 1/n$ kohti avoin joukko tehtävän 1 mukaan. Toinen osa: Tarvitset Caratheodoryn ehtoa manipuloidaksesi erotusta $m(G) - m^*(A)$

B) Päättele tästä komplementeilla, että on olemassa myös suljettu joukko $C \subset A$ siten, että $m(A \setminus C) < \epsilon$.

Tehtävä 4 (Harjoitusta sigma-algebran käsitteeseen:) *Olkoon X ylinumeroituva joukko. Määritellään $\Gamma := \{E \subset X : E \text{ on numeroituva, tai } E^c \text{ on numeroituva}\}$. Määritellään myös $\mu(E) := 0$ jos E on numeroituva ja $\mu(E) := \infty$ jos E^c on numeroituva. Osoita, että Γ on sigma-algebra ja μ on mitta.*

Tehtävä 5 (Borel-Cantelli) *Todista monisteen Huomautus 1.62:*
Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $A_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$. Jos pätee

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty, \tag{1}$$

niin silloin

$$\mu(\limsup_n A_n) = 0, \tag{2}$$

missä joukko $\limsup_n A_n$ *on joukko* $\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$ *(Sama kuin toisessa harjoituskokoelmassa). Viimeinen tarkoittaa (ei tarvitse todistaa tässä ellet todistanut aikaisemmissa harjoituksissa), että* melkein kaikki pisteet $x \in X$ kuuluvat vain äärellisen moneen joukoista A_n . *Tämä tulos on elintärkeä todennäköisyysteoriassa.*
(Vihje: [3])

Tehtävä 6 (Harjoitus Caratheodoryn ehdolle:) *Olkoon E mitallinen joukko, ja B mielivaltainen joukko. Osoita, käyttäen Caratheodoryn ehtoa, että pätee*

$$m^*(B \cup E) + m^*(B \cap E) = m^*(B) + \underbrace{m^*}_{m}(E).$$

(Vihje: [4])

[3] Todistus on lyhyt ja varsin suoraviivainen. Pidä pää kylmänä ja käytä mitalle päteviä perustuloksia.

[4] KÄYTÄ KUVIA APUNA. Ja Caratheodoryn ehdon tulkintaa siistinä leikkauksena, niinkuin Lemmassa 1.34 tai Lauseessa 1.36. Tarvitset Caratheodorya kaksi kertaa.