Mitta ja Integraali
Kevät 2015
3. tehtävät

Nämä tehtävät koskevat materiaalin sivuja 15-26.

**Tehtävä 1** *Osoita kaksi erittäin hyödyllistä perusominaisuutta ulkomitalle (Näissä ei kannata käyttää ulkomitan määritelmää vaan materiaalin tuloksia):*

*A) Numeroituva yhdiste nollaulkomittaisia joukkoja on nollaulkomittainen: Eli jos* $m^*(A_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, *niin pätee* $m^*\big(\bigcup_n A_n\big) = 0$.

*B) Jos* $B \subset A$ *ja* $m^*(B) < \infty$, *niin pätee* $m^*(A \setminus B) \geq m^*(A) - m^*(B)$. *(Oletus* $m^*(B) < \infty$ *on tarpeellinen, jottei kävisi näin:* $\infty - \infty$. *Tee hyvin selväksi missä kohtaa todistusta käytät tätä oletusta.)*

**Tehtävä 2** *Osoita, että seuraavien joukkojen* kolme*ulotteinen ulkomitta* $m_3^*$ *on nolla.*

*A) Kiekko* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 < R^2\}$

*B) Litteä taso* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

*C)* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{Q}, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$

**Tehtävä 3 (Ulkomitan translaatio-invarianssi)** *Todista materiaalin Lauseen 1.11 ensimmäinen osa:*
*Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Silloin pätee* $m_n^*(A + x) = m_n^*(A)$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}^n$.

**Tehtävä 4 (Numeroituva joukko on nollamittainen)** *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *numeroituva. Osoita määritelmää käyttäen, että sen ulkomitta on nolla. (Vihje: Matki Esimerkin 1.6 Todistusta. Lisätieto: Tämän voi toki todistaa subadditiivisuudella ja tiedolla* $m_n^*(\{x\}) = 0$, *mutta nyt harjoitellaan määritelmän käyttöä.)*

**Tehtävä 5 (Mitallisuusharjoitus)** *Tässä tehtävässä saa vapaasti käyttää kaikkia materiaalin tuloksia.*

*A) Olkoon* $m^*(A) = 0$. *Osoita, että jokainen joukon* $A$ *osajoukko* $B \subset A$ *on mitallinen.*

*B) Olkoon joukko* $E$ *Lebesgue-mitallinen ja joukko* $A$ *nollaulkomittainen,* $m^*(A) = 0$. *Osoita, että yhdiste* $E \cup A$ *ja erotus* $E \setminus A$ *ovat mitallisia.*

*C) Olkoon joukko* $E$ *Lebesgue-mitallinen ja joukko* $A \supset E$ *sellainen, että* $m^*(A \setminus E) = 0$. *Osoita, että* $A$ *on myös mitallinen.*

**Tehtävä 6 (Harjoitus Caratheodoryn ehdolle)** *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *mielivaltainen joukko ja olkoot* $E$ *ja* $F$ *Lebesgue-mitallisia joukkoja. Osoita Caratheodoryn ehtoa sopivalla testijoukolla käyttäen, että jos* $E$ *ja* $F$ *ovat* erillisiä, *eli* $E \cap F = \emptyset$, *niin pätee "täysadditiivisuus avaruudessa A":*

$$m^*((E \cap A) \cup (F \cap A)) = m^*(E \cap A) + m^*(F \cap A).$$

*[Tehtävän sanoma on, että vaikka joukkojen* $(E \cap A)$ *ja* $(F \cap A)$ *ei tarvitse olla mitallisia, niin täysadditiivisuus pätee silti tässä erikoistilanteessa. Vihje: Piirrä kuva, mieti Caratheodoryn ehdon tulkintaa, ja yritä sitä kautta keksiä lupaava testijoukko.]*